

Exercice 1 : Déterminer le domaine de définition des fonctions numériques suivantes :

$$(1) f(x) = x - \sqrt{x^2 - 1} ; (2) f(x) = 3 - \sqrt{1 - |x|} ; (3) f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}} ; (4) f(x) = \sqrt{\frac{x}{x-1}}$$

$$(5) f(x) = \sqrt{x^2 - x} ; (6) f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 5}{2x^2 - 3x + 1}} ; (7) f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{\sqrt{2 - |x-1|}} ; (8) f(x) = \sqrt{\frac{x^3 - 1}{-x^2 - x + 6}}$$

$$(9) \begin{cases} f(x) = \sqrt{-x+3}; x \leq 0 \\ f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{|x|-2}; x > 0 \end{cases} ; (10) \begin{cases} f(x) = \frac{x}{x+2} + 1; x < -1 \\ f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x+1}}; x > -1 \\ f(-1) = 0 \end{cases}$$

Exercice 2 : On considère les fonctions suivantes ; étudier la parité de ces fonctions :

$$(1) f(x) = x^2 - 2|x| ; (2) f(x) = \frac{|x|-2}{\cos x} ; (3) f(x) = \frac{x^2}{|x-1|-|x+1|} ; (4) f(x) = \frac{x}{x^3-1}$$

$$(5) f(x) = \frac{-x^3}{\sqrt{1-\cos x}} ; (6) f(x) = \begin{cases} f(x) = 2-x; x \leq -1 \\ f(x) = 3|x|; x \in [-1, 1] \\ f(x) = 2+x; x \geq 1 \end{cases}$$

Exercice 3 : Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2 - 2x + 3$.

1.a- Montrer que f est croissante sur l'intervalle $[1, +\infty[$ et décroissante sur $] -\infty, 1]$

b- Dresser le tableau de variation de f

c- Montrer que f admet un minimum absolue à préciser

2. a. Pourquoi la fonction $g(x) = \sqrt{f(x)}$ est-elle définie sur \mathbb{R} ?

b. Montrer pour tout a et b de \mathbb{R} avec $a \neq b$ on a $\frac{g(b)-g(a)}{a-b} = \frac{f(a)-f(b)}{a-b} \times \frac{1}{\sqrt{f(a)}+\sqrt{f(b)}}$

c. En déduire les variations de g sur \mathbb{R} .

3. Montrer que pour $x \in [1, 2]$ on a $\sqrt{2} \leq g(x) \leq 3$

4- Déterminer x sachant que $g(x) \in [\sqrt{2}, 3]$

Exercice 4 Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{2|x|-3}{x^2}$

1) Déterminer le domaine de définition de f et étudier la parité de f

2) a) a et b étant deux réels de \mathbb{R}_+^* ; Montrer que $\frac{f(a)-f(b)}{a-b} = \frac{3a+3b-2ab}{a^2 \cdot b^2}$.

b) Montrer que f est strictement décroissante sur $[3, +\infty[$ et strictement croissante sur $]0, 3]$

c) Dresser le tableau de variation de f .

3) Montrer que $\frac{1}{3}$ est un maximum de f sur $]0, +\infty[$.

4) Donner le tableau de variation de f sur D_f

5) En déduire une comparaison de $A = \frac{2\sqrt{11}-3}{11}$; $B = \frac{2\sqrt{13}-3}{13}$ justifier votre réponse