Exercice sur les suites numériques.

JAOUAD filali

EX1 Soit la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$.

1. *a)* Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4. On pourra en donner des valeurs approchées à 10^{-2} près.

b) Formuler une conjecture sur le sens de variation de cette suite.

2. *a)* Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant n + 3$.

b) Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n + 3 - u_n)$.

c) En déduire une validation de la conjecture précédente.

3. On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - n$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.

b) En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + n$.

c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

4. Pour tout entier naturel non nul n, on pose : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ et $T_n = \frac{S_n}{n^2}$.

a) Exprimer S_n en fonction de n.

b) Déterminer la limite de la suite (T_n).

EX2 On considère la suite de nombres réels (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = -1$, $u_1 = \frac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$.

1. Calculer u_2 et en déduire que la suite (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.

2. On définit la suite (v_n) en posant, pour tout entier naturel n : $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$.

a) Calculer v_0.

b) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.

c) En déduire que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

d) Exprimer v_n en fonction de n.

3. On définit la suite (w_n) en posant, pour tout entier naturel n : $w_n = \frac{u_n}{v_n}$.

a) Calculer w_0.

b) En utilisant l'égalité $u_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}u_n$, exprimer w_{n+1} en fonction de u_n et de v_n.

c) En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$, $w_{n+1} = w_n + 2$.

d) Exprimer w_n en fonction de n.

4. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{2n - 1}{2^n}$.

5. Pour tout entier naturel n, on pose : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.

Démontrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$: $S_n = 2 - \frac{2n + 3}{2^n}$.