Exercice 1.

On considère la suite numérique$(U_n)_n$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1)Calculer u_1,u_2,u_3.Est ce que u_n géométrique ;arithmétique?

2) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n \leq \frac{5}{3}$

3) Étudier la monotonie de $(u_n)_n$

4) On pose : $v_n = u_n - \frac{5}{3}$

a- Montrer que la suite $(v_n)_n$ est géométrique en déterminant sa raison et son premier terme.

b- Calculer v_n et puis u_n en fonction de n .

5) Pour tout n de $\mathbb{N}$ on pose :

$$S_n = v_0 + v_1 \ldots + v_n$$
$$S'_n = u_0 + u_1 \ldots + u_n$$

a- Calculer S_n en fonction de n .

b- Déduire S' en fonction de n.

6) Calculer :$\lim U_n$, $\lim V_n$, $\lim S_n$ et $\lim S'_n$

Exercice 2.

On pose $\begin{cases} u_0 = \frac{2}{3} \\ u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{2u_n + 3} \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) Calculer u_1 , u_2 .

2) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$ $0 \leq u_n \leq 1$

3) On pose $V_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$.

a- Étudier la monotonie de $(V_n)_n$.

b- Montrer que $(V_n)_n$ est une suite géo-métrique.

c- Calculer V_n en fonction de n puis déduire u_n en fonction de n.

4)a- Calculer la somme $S_n = V_0 + V_1 \ldots + V_n$ en fonction de n .

b- Calculer la limite de u_n puis celle de S_n.

Exercice 3.

On considère la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + \frac{3}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Pour tout n de $\mathbb{N}$ on pose : $V_n = U_n - 3$

1) Montrer que $(V_n)_n$ est une suite géométrique et déterminer sa raison.

2)a- Déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$: $U_n = 3 + \frac{1}{2^n}$

b- Calculer $\lim U_n$.

3)On pose : $S_n = U_0 + U_1 + \ldots + U_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

a- Montrer : $S_n = 3n + 5 - \frac{1}{2^n}$

b- Calculer la limite $\lim S_n$.

Exercice 4.

Soit $(U_n)_{n\geq 0}$ la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{3}{\sqrt{6 - U_n{}^2}} \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ $(U_n)^2 \neq 3$

2) On pose :$V_n = \frac{U_n^2}{3 - U_n^2}$

Montrer que $(V_n)_n$ est une suite arithmétique. .

3) Exprimer V_n en fonction de n .

4) Déduire U_n en fonction de n puis calculer $\lim U_n$.

Exercice 5.

on considère la suite numérique $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} U_0 = 0 \quad U_1 = 1 \\ U_{n+2} = \frac{2}{5}U_{n+1} - \frac{1}{25}U_n \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Pour tout n de $\mathbb{N}$ on pose : $V_n = U_{n+1} - \frac{1}{5}U_n$
$W_n = 5^n.U_n$

1) Calculer U_0 et W_0 .

2) Montrer que $(V_n)_{n\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$ puis écrire U_n en fonction de n .

3)Montrer que$(W_n)_{n\mathbb{N}}$ estarithmétique de raison 5 écrire W_n en fonction de n .

4)a- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $0 < U_n < \frac{2}{5}U_n$

b- Déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $0 < U_{n+1} < \left(\frac{2}{5}\right)^n$

www.filalimaths.com