المادة:	الرياضيات NS25	المعامل:	9
الشعب(ة) أو المسلك :	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (الترجمة الفرنسية)	مدة الإنجاز:	4

- La durée de l’épreuve est de 4 heures.
- L’épreuve comporte cinq exercices indépendants deux à deux.
- Les exercices peuvent être traités selon l’ordre choisi par le candidat.

-Le premier exercice se rapporte aux structures algébriques .
- Le deuxième exercice se rapporte aux nombres complexes .
- Le troisième exercice se rapporte à l’arithmétique .
-Le quatrième exercice se rapporte à l’analyse.
- Le cinquième exercice se rapporte à l’analyse.

Les calculatrices programmables sont strictement interdites

Exercice 1 :(3,5 points) **Les partis I et II sont indépendantes.**

I -On munit l'ensemble $I =]0,+\infty[$ de la loi de composition interne $*$ définie par :

$$\left(\forall (a,b) \in I \times I\right) \quad a * b = e^{\ln(a)\cdot\ln(b)}$$

0,5 1) Montrer que la loi $*$ est commutative et associative dans I.

0,25 2) Montrer que la loi $*$ admet un élément neutre ε que l'on déterminera.

0,75 3) a-Montrer que $\left(I \setminus \{1\}, *\right)$ est un groupe commutatif.

($I \setminus \{1\}$ désigne l'ensemble I privé de 1).

0,25 b-Montrer que $]1,+\infty[$ est un sous-groupe de $\left(I \setminus \{1\}, *\right)$.

4)On munit I de la loi de composition interne $\times$($\times$est la multiplication dans $\mathbb{R}$)

0,25 a-Montrer que la loi $*$ est distributive par rapport à la loi $\times$

0,5 b-Montrer que $(I,\times,*)$ est un corps commutatif.

II-On considère la matrice : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

0,5 1) Calculer A^2 et A^3

0,5 2) En déduire que la matrice A est non inversible.

Exercice 2 : (3,5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

0,25 1)a-Déterminer les deux racines carrées du nombre complexe $3+4i$

0,5 b-Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : $(E): 4z^2 - 10iz - 7 - i = 0$

2) Soient a et b les solutions de l'équation (E) avec $\operatorname{Re}(a) < 0$ et soient A et B leurs points images respectifs dans le plan complexe.

0,25 a-Vérifier que : $\dfrac{b}{a} = 1 - i$

0,75 b- En déduire que le triangle AOB est rectangle et isocèle en A.

3) Soient C un point du plan différent du point A ayant pour affixe c et D l'image du point B par la rotation de centre C et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$; et soit L l'image du point D par la translation de vecteur $\overrightarrow{AO}$.

0,5 a-Déterminer en fonction de c le nombre complexe d affixe du point D

0,5 b-Déterminer en fonction de c le nombre complexe ℓ affixe du point L

0,75 c-Déterminer la forme algébrique du nombre complexe $\dfrac{\ell - c}{a - c}$;en déduire la nature du triangle ACL .

Exercice 3 :(3 points)

1 1)Déterminer tous les nombres entiers naturels m tels que : $m^2+1\equiv 0 \quad [5]$

2)Soit p un nombre premier tel que $p=3+4k$ où k est un nombre entier naturel .

Soit n un nombre entier naturel tel que : $n^2+1\equiv 0\ [p]$

0,25 a-Vérifier que : $\left(n^2\right)^{1+2k}\equiv -1\ [p]$

0,5 b- Montrer que n et p sont premiers entre eux.

0,75 c- En déduire que : $\left(n^2\right)^{1+2k}\equiv 1\ [p]$

0,5 d- Déduire de ce qui précède qu'il n'existe pas d'entier naturel n vérifiant : $n^2+1\equiv 0\ [p]$

Exercice 4 : (6.25 points)

I- On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $f(x)=4xe^{-x^2}$

Soit (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

0,5 1)Calculer la limite de f en $+\infty$

0,75 2)Etudier les variations de f sur l'intervalle $[0;+\infty[$ puis donner son tableau de variations.

0,75 3)Déterminer l'équation de la demi-tangente à la courbe (C) à l'origine du repère puis construire la courbe (C).(on prend $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2cm$ et on admet que le point d'abscisse $\sqrt{\frac{3}{2}}$ est un point d'inflexion de la courbe (C))

0,5 4) Calculer l'intégrale $a=\int_0^1 f(x)dx$ puis en déduire, en centimètre carré , l'aire de la partie plane limitée par la courbe (C) ,les deux axes du repère et la droite d'équation $x=1$

II) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 .

On considère la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $f_n(x)=4x^ne^{-x^2}$

0,25 1) a- Montrer que : $(\forall x>1)\quad e^{-x^2}<e^{-x}$

0,25 b- En déduire la limite de f_n quand x tend vers $+\infty$

0,75 2) Etudier les variations de la fonction f_n sur l'intervalle $[0;+\infty[$ puis donner son tableau de variations.

0,5 3)Montrer qu'il existe un nombre réel unique u_n de l'intervalle $]0,1[$ tel que : $f_n(u_n)=1$

0,25 4) a-Montrer que : $(\forall n\geq 2)\qquad f_{n+1}(u_n)=u_n$

0,75 b-montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est strictement croissante, en déduire qu'elle est convergente.

4)On pose : $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

0,25 a-Montrer que : $0 < \ell \leq 1$

0,25 b-Montrer que : $(\forall n \geq 2) \quad -\frac{\ln(4)}{n} < \ln(u_n) < \frac{1}{n} - \frac{\ln(4)}{n}$

0,5 c-En déduire que : $\ell = 1$

Exercice 5 : (3.75 points)

On considère la fonction numérique F définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $F(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\ln(1+t^2)} dt$

0,25 1)Montrer que F est impaire.

2)Pour tout réel x de l'intervalle $]0,+\infty[$ on pose : $\varphi(x) = \int_1^x \frac{1}{\ln(1+t^2)} dt$

0,25 a-Vérifier que : $(\forall x > 0) \quad F(x) = \varphi(2x) - \varphi(x)$

0,5 b-Montrer que F est dérivable sur l'intervalle $]0,+\infty[$ puis calculer $F'(x)$ pour $x > 0$.

0,5 c-En déduire le sens de variations de la fonction F sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

0,5 3) a-En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que :

$$(\forall x > 0) \quad (\exists c \in]x, 2x[) \ : \ F(x) = \frac{x}{\ln(1+c^2)}$$

0,25 b- En déduire que : $(\forall x > 0) \quad \frac{x}{\ln(1+4x^2)} < F(x) < \frac{x}{\ln(1+x^2)}$

0,75 c-Déterminer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x}$

d-Montrer que : $F\left(\sqrt{e-1}\right) < \sqrt{e-1}$ et $F\left(\frac{\sqrt{e-1}}{2}\right) > \frac{\sqrt{e-1}}{2}$

0,75 en déduire que l'équation $F(x) = x$ admet une solution unique dans $]0,+\infty[$.