Dérivabilité de fonctions en 2 bac pc

I-Dérivation d'une fonction

JAOUAD filali

1. Dérivabilité en un point – Nombre dérivé

1.1 Définitions

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant x_0. On dit que f est dérivable en x_0 si la fonction $x \mapsto \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite finie en x_0. Cette limite, lorsqu'elle existe, est appelée nombre dérivé de f en x_0 ; on la note f '(x_0)

On a donc $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ou, en posant $x=x_0+h$, $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

Exemple : $f(x) = x^2 + x - 1$

f est-elle dérivable en $x_0=1$?

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x^2+x-1)-(1+1-1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x^2+x-2}{x-1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+2)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \to 1} (x+2)$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 3$$

On a une limite finie, donc f est dérivable en 1 et ..**f '(1)= 3**

1.2 Définition 2

f est dérivable en x_0 si pour tout h tel que h appartient à I, on peut écrire

$$f(x_0+h) = f(x_0) + ah + h\varphi(h) \text{ avec } \lim_{h \to 0} \varphi(h) = 0.$$

Avec cette formulation de la définition, le réel a est le nombre dérivé de f en x_0

Démonstration :

Soit a un réel quelconque. Considérons la fonction φ définie par $\begin{cases} \varphi(x) = \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - a \text{ si } x \neq 0 \\ \varphi(0) = 0 \end{cases}$

On a alors pour tout h tel que x_0+h appartient à I, $\mathbf{f(x_0+h) = f(x_0) + a.h + h\varphi(h)}$

$$\lim_{h \to 0} \varphi(h) = 0 \text{ équivaut à } \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = a$$

Ce qui établit l'équivalence.

L'écriture $f(x_0+h) = f(x_0) + a.h + h\varphi(h)$ est appelée développement limité d'ordre 1 de f au point x_0.

Remarque

$\mathbf{f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0).h+h\varphi(h)}$ donc $f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0).h=h\varphi(h)$

Et lorsque h tend vers 0, $\varphi(h)$ tend aussi vers 0 ; ce qui fait que lorsque h est très proche de 0, alors $\mathbf{f(x_0+h)}$ est aussi très proche de $\mathbf{f(x_0)+f'(x_0).h}$

L'erreur commise en prenant $\mathbf{f(x_0)+f'(x_0).h}$ comme valeur approchée de $f(x_0+h)$ est

$\mathbf{h\varphi(h)=f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0).h}$

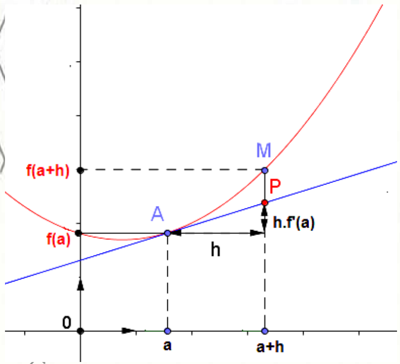
En utilisant la variable x, le développement limité de f en a s'écrit : $\mathbf{f(x)=f(x_0)+f'(x_0).(x-x_0)+(x-x_0)\varphi(x)}$

La fonction $\mathbf{x\mapsto f(x_0)+f'(x_0).(x-x_0)}$ est la meilleure approximation affine de f au voisinage de x_0

Interprétation graphique :

$|h.\varphi(h)|$ *représente la distance PM.*

Plus M se rapproche de A, plus la distance devient très petite



1.3 Interprétation géométrique du nombre dérivé

Soit $\mathbf{(C_f)}$ la courbe représentative d'une fonction f

et $M_0(x_0,f(x_0))$ et $M(x,f(x))$ deux points de $\mathbf{(C_f)}$. Considérons la

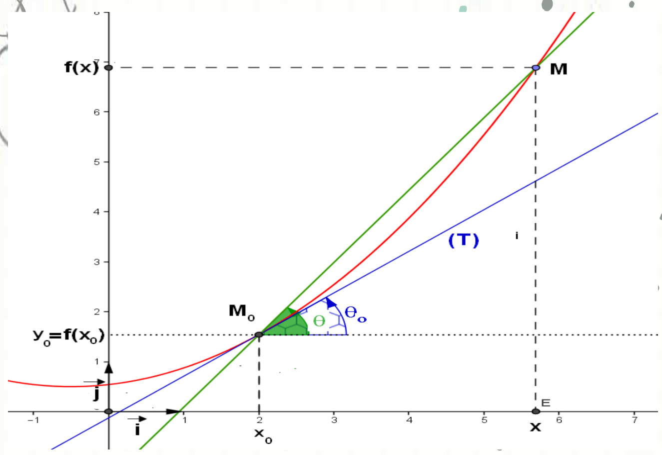
droite (AM) ; elle a pour pente (oucoefficient directeur)

$$\mathbf{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$$

Si on fait tendre M vers M_0 , x va tendre vers x_0 et la

droite (M_0M) va tendre vers une position limite (T)

appelée droite tangente à la courbe au point A, et



sa pente tend vers $\mathbf{\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)}$ qui

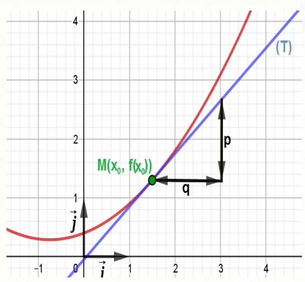
est la pente de (T) : c'est la tangente de l'angle θ_0 que fait la droite (T) avec l'axe des abscisses.

Considérons un point M(x,y) de (T), on doit avoir : $\mathbf{\tan\theta_0=f'(x_0)=\frac{y-f(x_0)}{x-x_0}}$

ou $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$: c'est l'équation de la tangente (T) à la courbe (ζ_f) au point M_0 (x_0 ;f(x_0))

Remarques

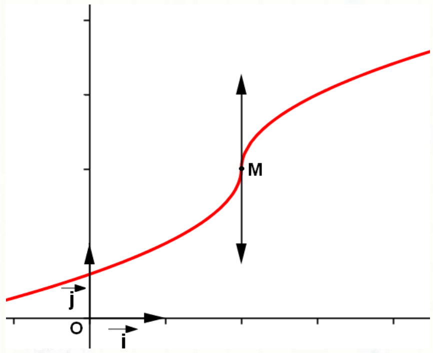
- Si $f'(x_0)=\dfrac{p}{q}$, alors nous avons la construction suivante



- Si f'(x_0) = 0, on a une tangente parallèle à l'axe des abscisses (tangente horizontale).

- Si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \infty$, f n'est pas dérivable en x_0,

on a une tangente parallèle à l'axe des ordonnées.



1.4 Dérivabilité à gauche – dérivabilité à droite

On dit que f est dérivable à droite en x_0 (respectivement à gauche) si la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite finie quand x tend vers x_0^+ (respectivement vers x_0^-).

Les limites lorsqu'elles existent, sont appelées respectivement nombre dérivé à gauche et nombre dérivé à droite de f en x_0, et notés $f'_g(x_0)$ et $f'_d(x_0)$.

$$f_d'(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \quad \text{et} \quad f_g'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$, lorsqu'elles sont finies.

Théorème

Pour qu'une fonction f soit dérivable en x_0 ; il faut et il suffit que les nombres dérivés à gauche et à droite soient égaux, c'est-à-dire si :

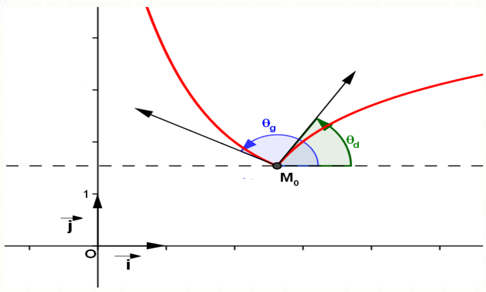
$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \text{ (finie)}$$

Remarque

Si $f'_d(x_0) \neq f'_g(x_0)$, (f n'est pas dérivable en x_0) on a deux demi tangentes à gauche et à droite de M_0, de pentes respectives. $f'_g(x_0)$ et $f'_d(x_0)$.

On dit que M_0 est un point anguleux.

On a $f'_d(x_0) = \tan\theta_d$ et $f'_g(x_0) = \tan\theta_g$



II. Dérivabilité sur un intervalle

2.1 Définitions

f est dérivable sur $]a,b[$ si elle est dérivable en chaque point de cet intervalle.

f est dérivable sur $[a,b]$ si elle est dérivable sur $]a,b[$, dérivable à gauche en b et dérivable à droite en a.

Théorème

Si f est dérivable en x_0, elle est continue en x_0.

<u>*Démonstration*</u> : f est dérivable en x_0 donc $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ est un réel *l*.

Posons $\begin{cases} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - l & \text{si} \quad x \neq x_0 \\ \varphi(x_0) = 0 \end{cases}$

On a $\quad f(x) = [\varphi(x) + l](x - x_0) + f(x_0)$

Donc

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} [f(x_0) + \varphi(x)(x - x_0) + l(x - x_0)]$$

$$= \lim_{x \to x_0} f(x_0) + \lim_{x \to x_0} \varphi(x)(x - x_0) + \lim_{x \to x_0} l(x - x_0)$$

Or $\quad \lim\limits_{x \to x_0} f(x_0) = f(x_0) \quad , \quad \lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)(x - x_0) = 0 \quad$ et $\lim\limits_{x \to x_0} l(x - x_0) = 0$

Ainsi $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. D'où la continuité de f en 0.

<u>Remarque</u> :

La réciproque de ce théorème n'est pas vraie : il suffit de considérer les fonctions dont la courbe possède un point anguleux.

<u>Exemple:</u>

$\begin{cases} f(x) = x^2 + 3x \ \ si\, x \geq 0 \\ f(x) = x^2 - 3x \ si\, x < 0 \end{cases}$ f continue en 0 mais non dérivale en 0

<u>2.2 Fonctions de référence</u>

- Les fonctions constantes sont dérivables sur IR.
- La fonction identité $x \mapsto x$ est dérivable sur IR.
- La fonction racine carré $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur]0 ; +∞ [.
- Les fonctions cosinus et sinus sont dérivables sur IR.

Démonstrations

- Soit f la fonction définie pour tout x de IR par f(x)= k, où k est une constante réelle.

<u>III-Fonctions dérivées</u>

<u>1. Définition</u>

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. On appelle fonction dérivée de f (ou dérivée de f) sur I la fonction notée f', qui à tout x de I associe le nombre dérivé de f en x.

$$f' : x \mapsto f'(x) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$f(x)$	$f'(x)$
a $(\in R)$	0
x	1
x²	2x
x^n $(n \in IN^*)$	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
sin x	cos x
cos x	- sin x
tan x	$1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2(x)}$

3. Opérations sur les fonctions dérivées

Théorème

Si u et v sont des fonctions dérivables sur I alors $u+v,\ u\cdot v\ \ et\ \lambda u\,(\lambda \in R)$ sont dérivables sur I. Si de plus, v ne s'annule pas sur I alors $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I.

Et on a :

$$(u+v)' = u'+v'$$
$$(u\cdot v)' = vu'+u'v$$
$$(\lambda u)' = \lambda \cdot u'$$
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-v'u}{v^2}$$

En particulier $\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2}$

Si u est dérivable et strictement positive sur I, alors $\sqrt{u}$ est dérivable et $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

Conséquences

- Si u est dérivable, u² est dérivable et $(u^2)' = 2uu'$

  Plus généralement, $u^n, (n \in IN^*)$ est dérivable et $(u^n)' = n.u^{n-1}u'$
- Toute fonction polynôme est dérivable sur IR
- Toute fonction rationnelle est dérivable sur son domaine de définition.

- **Exercice**

u est une fonction dérivable sur I, et tel que $u(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$.

Montrer que $\left(\frac{1}{u^n}\right)' = -\frac{nu'}{u^{n+1}}$, $n \in N^*$

4. Dérivée seconde d'une fonction

Si f est dérivable sur I et sa dérivée f ' est, elle aussi, dérivable sur I, on dit que f est deux fois dérivable sur I, et la dérivée de f ', notée f'', est appelée dérivée seconde de f.

Exemple :

$$f(x)=2x^3-3x^2+7x-1$$

f est une fonction polynôme donc dérivable sur IR.

$$f'(x)=6x^2-6x+7$$

f ' est une fonction polynôme donc dérivable sur IR.

$$f''(x)=12x-6$$

Plus généralement, si n est un entier naturel supérieur ou égal à 2, on appelle dérivée n^e de f la dérivée de la dérivée $(n-1)^e$ de f. On la note $f^{(n)}$.

Ainsi $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$

La dérivée $3^è$ de f est la dérivée de la dérivée seconde : $f''' = f^{(3)} = (f'')'$

La dérivée 10^e de f est la dérivée de la dérivée 9^e de f : $f^{(10)} = (f^{(9)})'$

Exemple :

Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables

Soit f (x) = sin x.

$f'(x) = \cos x$, $f''(x)= (f')'(x)= -\sin x$, $f'''(x)= f^{(3)}(x)= (f'')'(x)= -\cos x$…

5. Dérivée d'une fonction composée

Théorème

Si f est dérivable sur I et g dérivable sur J = f(I), alors gof est dérivable sur I et (gof)'= f'. g'o f, pour tout x de I, (gof)'(x)=f '(x). g'(f(x)).

En particulier,

- si f(x)= cos (ax+b), alors f '(x) = -a. sin (ax+b)
- si f(x)= sin (ax+b), alors f '(x) = a. cos (ax+b)
- si $f(x)= (ax+b)^n$, $(n \in IN^*)$ alors $f'(x) = a.\ n\ (ax+b)^{n-1}$

Exemple

On peut retrouver la formule de la dérivée de $\sqrt{u}$ avec cette formule :

Soit f la fonction définie par $f(x)= \sqrt{u(x)}$

Posons $g(x)= \sqrt{x}$. On a f(x)= g(u(x)) = g o u (x)

g est dérivable sur] 0 ; +∞ [et $g'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Si u est dérivable et u(x) > 0 pour tout x de I , alors f est dérivable sur I et (gof)'(x)=f '(x). g'(f(x)),

ou $f'(x)=u'(x).\dfrac{1}{2\sqrt{u(x)}}=\dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$

6. Dérivée de la réciproque

6.1 Théorème

Soit f une fonction définie et continue et strictement monotone sur un intervalle I, et x_0 un élément de I.

- Si f est dérivable en x_0 et si $f'(x_0) \neq 0$ alors sa réciproque f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$.

- Si f est dérivable sur I et si sa dérivée ne s'annule pas sur I, alors sa réciproque f^{-1} est dérivable sur J = f(I) et $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$.

Exemple

$f(x) = x^n$, $n > 0$. f est dérivable sur I =] 0 ; +∞ [et $f'(x) = n\,x^{n-1}$

f est continue et strictement croissante sur I =] 0 ; +∞ [. Alors elle réalise une bijection de I =] 0 ; +∞ [sur J = f(I)=] 0 ; +∞ [, et admet une réciproque f^{-1} définie par $f^{-1}(y) = \sqrt[n]{y} = y^{\frac{1}{n}}$

De plus elle est dérivable sur I, et sa dérivée ne s'annule pas sur I. Ainsi, sa réciproque f^{-1} est dérivable sur J.

$f'(x) = n\,x^{n-1}$, donc $f'(f^{-1}(y)) = n\,(f^{-1}(y))^{n-1}$.

Comme $f^{-1}(y) = \sqrt[n]{y} = y^{\frac{1}{n}}$, on a $f'(f^{-1}(y)) = n\,(y^{\frac{1}{n}})^{n-1} = ny^{\frac{n-1}{n}} = ny^{1-\frac{1}{n}}$.

Finalement, $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{n}\frac{1}{y^{1-\frac{1}{n}}}$

Ainsi, si $f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$, alors f est dérivable sur I et $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{n}y^{\frac{1}{n}-1}$

Exercices:

Déterminer le domaine de définition de la fonction f et le domaine de sa fonction dérivée

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 3x + 4} \; ; \; g(x) = \sqrt[4]{\frac{x^2 - 2x}{x - 1}}$$

$$h(x) = \sqrt[3]{(x^2 + 3x)^2} \; ; k(x) = (x^2 + 3x)^{\frac{2}{3}}$$