SUITES NUMÉRIQUES

I. Définition et génération d'une suite

1) Notion de suite numérique

Définition :
Une suite u est une fonction définie sur $\mathbb{N}$
A chaque entier naturel n, on associe un nombre réel u_n de la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

2) Modes de génération d'une suite

Une suite peut être engendrée de deux manières :
Définition explicite du terme d'indice n $\boxed{\text{du type } u_n = f(n)}$ où f est une fonction. Par exemple $u_n = 3n - 5$ pour tout entier n.

Définition "par récurrence" du type $\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad \forall n \geqslant 0 \end{cases}$ où f est une fonction définie sur un intervalle I telle que $f(I) \subset I$.

Cette relation de récurrence permet de calculer un terme de la suite à partir du terme précédent. L'inconvénient majeur est que des termes de rangs élevés sont difficiles « d'accès » : pour calculer u_{100} il faut, a priori, calculer tous les termes précédents, jusqu'à u_{99} ! ! !

Par exemple, la suite (u_n) est définie par $u_0 = -2$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = 3u_n - 5$, pour tout entier n.

II. Suites majorées, minorées, bornées

Définition : *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite .*
- *On dit que la suite (u_n) est **majorée** s'il existe un réel M (appelé majorant) tel que $u_n \leqslant M$, $\forall n \in \mathbb{N}$.*
- *On dit que la suite (u_n) est **minorée** s'il existe un réel m (appelé minorant) tel que $u_n \geqslant m$, $\forall n \in \mathbb{N}$.*
- *On dit que la suite (u_n) est **bornée** si elle est à la fois minorée et majorée.*

Exemple :
$u_n = 5 + \frac{1}{n}$, pour tout entier $n > 0$. La suite (u_n) est minorée par 5 et majorée par 6. Elle est donc bornée par 5 et 6.

III. Sens de variation d'une suite

Définition : *Dire qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :*
- *strictement croissante signifie que, $\forall n$, on a $u_{n+1} > u_n$*
- *strictement décroissante signifie que, $\forall n$, on a $u_{n+1} < u_n$*
- *constante signifie que $\forall n$, on a $u_{n+1} = u_n$*

Remarque : Toutes les suites ne sont pas monotones : par exemple, la suite définie par $u_n = (-1)^n \times n^2$ ne l'est pas : $u_0 = 0$, $u_1 = -1$, $u_2 = 4$, $u_3 = -9$, $u_4 = 16$, etc

Méthodes :
- **Pour étudier le sens de variation d'une suite, on étudie le signe de la différence :**
  Par exemple, si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_n = n^2 + 2$, alors on a $u_{n+1} = (n+1)^2 + 2 = n^2 + 2n + 3$. Ainsi pour tout n on a $u_{n+1} - u_n = 2n + 1$. On voit que $u_{n+1} - u_n > 0$, et donc que $u_{n+1} > u_n$ pour tout n : la suite est donc strictement croissante.
- **Si tous les termes de la suite (u_n) sont strictement positifs, on peut comparer le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ avec 1 :**
  Par exemple, pour $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = 2 \times 5^n$, on a $u_n > 0$ pour tout entier naturel n et $u_{n+1} = 2 \times 5^{n+1}$. Ainsi pour tout n, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2 \times 5^{n+1}}{2 \times 5^n} = 5$. On remarque que $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, et donc que $u_{n+1} > u_n$ pour tout n puisque $u_n > 0$ $\forall n$: la suite est donc strictement croissante.

IV. SUITES ARITHMÉTIQUES

1) Définition d'une suite arithmétique

Définition :
*Dire d'une suite (u_n) qu'elle est **arithmétique** signifie qu'il existe un certain réel r, appelé **raison** de la suite, tel que, pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = u_n + r$*

On passe d'un terme de la suite au suivant en ajoutant toujours le même nombre r.
Reconnaître une suite arithmétique :
Pour qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit arithmétique, il faut et il suffit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la différence $u_{n+1} - u_n$ soit constante : $u_{n+1} - u_n = r \in \mathbb{R}$. Le nombre r est alors la raison de la suite (u_n).

2) Formule explicite d'une suite arithmétique

Théorème : *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r.*

- ***Relation entre u_n et u_0 :***
  pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = u_0 + nr$
- ***Relation entre u_n et u_p :***
  pour tous $n,p \in \mathbb{N}$, on a $u_n = u_p + (n-p)r$

3) Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique

Propriété : (Somme des n premiers entiers)
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

preuve : En additionnant membre à membre les deux égalités, on obtient :

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
 & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \ldots & + & n-2 & + & n-1 & + & n & = & S_n \\
+ & n & + & n-1 & + & n-2 & + & \ldots & + & 3 & + & 2 & + & 1 & = & S_n \\
\hline
 & (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1) & + & \ldots & + & (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1) & = & 2S_n
\end{array}$$

Autrement dit, $2S_n = n \times (n+1)$ d'où $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Théorème :

- *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique alors :*
  $u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (n+1) \times \dfrac{u_0 + u_n}{2}$
- *Plus généralement, la somme de N termes consécutifs d'une suite arithmétique est donnée par :*
  $S = \text{nombre de termes} \times \dfrac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$

preuve :
$S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$
$S = u_0 + (u_0 + r) + (u_0 + 2r) + \cdots + (u_0 + nr)$
$S = (n+1) \times u_0 + r \times (1 + 2 + \cdots + n)$
$S = (n+1) \times u_0 + r \times \dfrac{n(n+1)}{2}$

$S = (n+1) \times \dfrac{2u_0 + nr}{2}$
$S = (n+1) \times \dfrac{u_0 + (u_0 + nr)}{2}$
$S = (n+1) \times \dfrac{u_0 + u_n}{2}$

4) Sens de variation d'une suite arithmétique

Propriété : *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r.*

- *Si $r > 0$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.*
- *Si $r < 0$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.*

Ce résultat découle naturellement de $u_{n+1} - u_n = r$.

V. SUITES GÉOMÉTRIQUES

1) Définition d'une suite géométrique

Définition :
*Dire d'une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qu'elle est **géométrique** signifie qu'il existe un certain réel non nul q, appelé **raison** de la suite tel que pour tout $n \geqslant 0$, $v_{n+1} = q \times v_n$*

On passe d'un terme de la suite au suivant en multipliant toujours par le même nombre q.
Reconnaître une suite géométrique :
Pour qu'une suite (v_n) soit géométrique, il suffit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les termes v_n soient non nuls et que le quotient $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ soit constant : $\frac{v_{n+1}}{v_n} = q \in \mathbb{R}^*$. Le nombre q est alors la raison de la suite.

2) Formule explicite d'une suite géométrique

Théorème : *Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique, de premier terme v_0 et de raison q.*
- ***Relation entre v_n et v_0 :** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n = v_0 \times q^n$*
- ***Relation entre v_n et v_p :** Pour tous $n,p \in \mathbb{N}$, on a $v_n = v_p \times q^{n-p}$*

3) Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique

Propriété : (Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique)
Pour tout réel $q \neq 1$
- *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$*
- *La somme de N termes consécutifs d'une suite géométrique est donnée par :*
  $S = \text{premier terme} \times \dfrac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}$

preuve :
En soustrayant membre à membre les deux égalités, on obtient :

$$\begin{array}{rcccccccccccc}
 & 1 & + & q & + & q^2 & + & \dots & + & q^{n-1} & + & q^n & = & S \\
- & (q & + & q^2 & + & q^3 & + & \dots & + & q^n & + & q^{n+1} & = & qS) \\
\hline
 & & & & & & & & & 1 & - & q^{n+1} & = & S - qS \\
 & & & & & & & & & & & 1 - q^{n+1} & = & S(1-q)
\end{array}$$

d'où le résultat attendu : $S = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$ car $q \neq 1$.

4) Sens de variation d'une suite géométrique

Propriété : *Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de premier terme $v_0 > 0$ et de raison q.*
- *Si $0 < q < 1$ alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.*
- *Si $q = 1$ alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.*
- *Si $q > 1$ alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.*
- *Si $q < 0$ alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est ni croissante, ni décroissante.*