

# GENERALITES SUR LES FONCTIONS

## I) ACTIVITES ET RAPPELLES

### 1.1 Ensemble de définition

#### Activités 1:

Déterminer les ensembles de définition des fonctions suivantes définies de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  :

$$1. f(x) = \frac{2\sqrt{x+1}}{3x^2+x-4}$$

$$2. g(x) = \frac{\sqrt{2x+1}+3x}{\sqrt{x-x^2}}$$

$$3. h(x) = \frac{\tan x}{2\sin x+1}$$

$$4. k(x) = \frac{3x+1}{x-}$$

$$5. u(x) = \sqrt{-x}$$

$$6. v(x) = \sqrt{x-1} - \sqrt{1-x}$$

#### Activité 2 :

$$\begin{aligned} & f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ \text{Soit} \quad & x \mapsto \frac{x^2+1}{|x|-1} \end{aligned}$$

- 1- Déterminer  $\mathcal{D}_f$ .
- 2- Etudier la parité de  $f$ .
- 3- Donner la restriction de  $f$  sur  $\mathbb{R}^+$ .
- 4- Déterminer les variations de  $f$  sur  $[0,1[$  sur  $]1,1+\sqrt{2}]$  et sur  $[1+\sqrt{2},+\infty[$ .
- 5- Dresser le tableau de variation de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

## II) NOTIONS DE BASE

### 1) Ensemble de définition

#### Définition :(fonction)

On appelle **fonction numérique à variable réel** toute relation d'une partie  $E$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  tel que chaque élément  $x$  de  $E$  à **au plus une image dans  $\mathbb{R}$** .

Si  $f(x) = y$  alors :

- $y$  est l'image de  $x$  par la fonction  $f$
- $x$  est l'antécédent de  $y$  par la fonction  $f$ .

#### Définition :(Ensemble de définition d'une fonction)

Soit  $f$  une fonction numérique à variable réel de  $E$  dans  $\mathbb{R}$ , les éléments de  $E$  qui ont une image par  $f$  forment un ensemble qu'on appelle ensemble de définition de  $f$  et on le note  $\mathcal{D}_f$

$$\mathcal{D}_f = \{x \in E / f(x) \in \mathbb{R}\}$$

#### Exercice :

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction :  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto \sqrt{x - \sqrt{x+1}}$

#### Remarque :

Si  $f$  est une fonction dont l'ensemble de définition est  $\mathcal{D}_f$ , l'application définie de  $\mathcal{D}_f$  vers  $\mathbb{R}$  s'appelle **l'application associée à la fonction  $f$** .

## 2) Représentation graphique d'une fonction.

**Définition :** (Graphe d'une fonction)

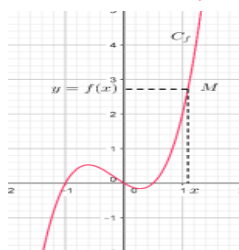
Soit  $f$  une fonction numérique à variable réel, le **graphe de la fonction  $f$**  est l'ensemble des couples  $(x, f(x))$  tels que  $x \in D_f$  ; on le note :  $\mathcal{G}_f$ .  $\mathcal{G}_f = \{(x, f(x)) / x \in D_f\}$

Si le plan est rapporté à un repère (souvent orthogonal), chaque coupe du graphe de  $f$  peut être représenté par un point  $M$ , l'ensemble des points ainsi définie forme une **courbe** dans le plan qu'on appelle **la courbe représentative de la fonction  $f$** , ou encore **la représentation graphique de la fonction  $f$**  on la note par :  $\mathcal{C}_f$

**Définition :**

Le plan étant rapporté à un repère  $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j})$ , la représentation graphique de la fonction  $f$  est l'ensemble des points  $M(x, f(x))$  tels que  $x \in D_f$ .  $\mathcal{C}_f = \{M(x, f(x)) / x \in D_f\}$

$$M(x, y) \in \mathcal{C}_f \Leftrightarrow \begin{cases} x \in D_f \\ y = f(x) \end{cases}$$

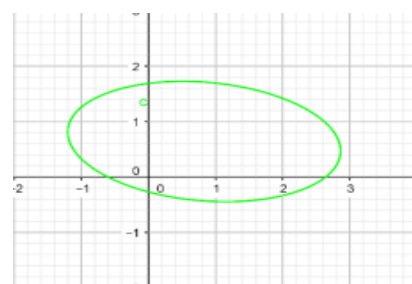
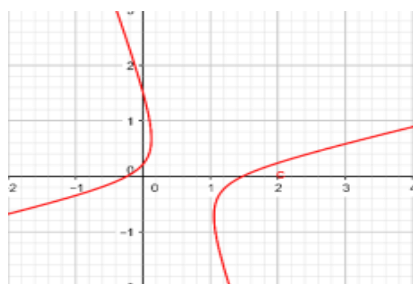


**Remarque :**

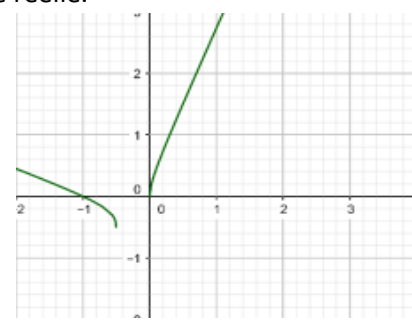
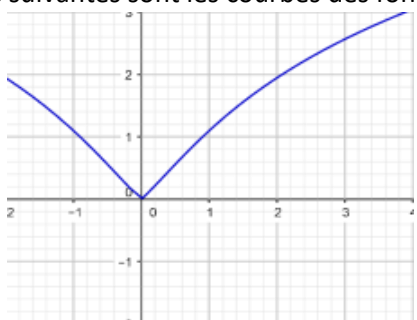
Pour qu'une courbe dans le plan soit une courbe d'une fonction numérique à variable réelle il faut et il suffit que **chaque parallèle à l'axe des ordonnées coupe cette courbe en au plus un point.**

**Exemples :**

Les courbes suivantes ne sont pas les courbes des fonctions numériques à variable réelle.



Les courbes suivantes sont les courbes des fonctions numériques à variable réelle.

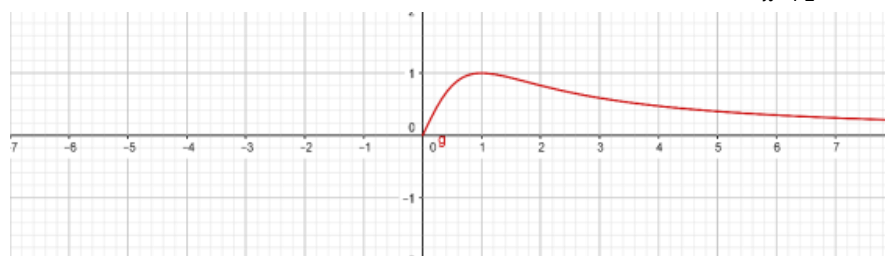


## III) FONCTIONS : PAIRE ; IMPAIRE ; PERIODIQUE

### 1) Activités :

**Activité 1 :**

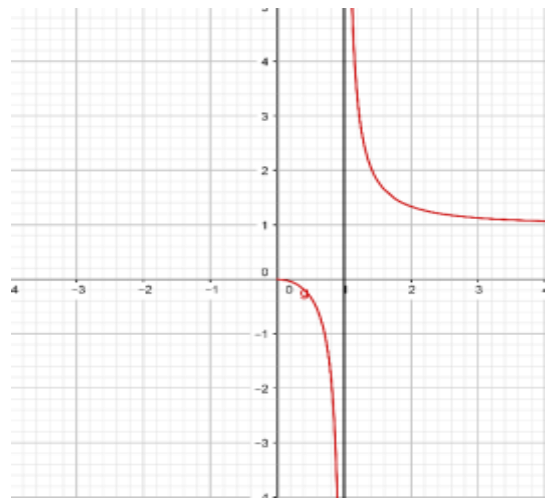
Compléter la courbe ci-dessous de la fonction  $h$  sachant que :  $h(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ .



La courbe ci-contre est une partie de la courbe de la fonction

$$\text{définie par : } h(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$$

- 1- Déterminer l'ensemble de définition de la fonction  $h$
- 2- Déterminer la nature de  $h$ .
- 3- Compléter la courbe  $C_h$



## 2) Fonction paires, fonctions impaires

### 2.1 Fonction paire :

#### Définition :

Soit  $f$  une fonction dont l'ensemble de définition est  $D_f$ , on dit que la fonction  $f$  est paire si :

- $(\forall x \in \mathbb{R})(x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f)$
- $(\forall x \in D_f)(f(-x) = f(x))$

#### Propriété :

Dans le plan muni d'un repère orthogonal, la courbe représentative d'une fonction paire est **symétrique par rapport à l'axe des abscisses**.

**Preuve :** (en exercice)

### 2.2 Fonctions impaire :

#### Définition :

Soit  $f$  une fonction dont l'ensemble de définition est  $D_f$ , on dit que la fonction  $f$  est impaire si :

- $(\forall x \in \mathbb{R})(x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f)$
- $(\forall x \in D_f)(f(-x) = -f(x))$

#### Propriété :

La courbe représentative d'une fonction impaire est **symétrique par rapport à l'origine du repère**.

**Preuve :** (en exercice).

## 3) Fonctions périodiques :

#### Définition :

Soit  $f$  une fonction dont l'ensemble de définition est  $D_f$ , on dit que la fonction  $f$  est **périodique** s'il existe un réel  $T$  non nul qui vérifie :

- $(\forall x \in \mathbb{R}) \left( x \in D_f \Rightarrow \begin{cases} x + T \in D_f \\ x - T \in D_f \end{cases} \right)$
- $(\forall x \in D_f)(f(x + T) = f(x))$

Tout réel  $T$  qui vérifie la définition s'appelle **une période de la fonction  $f$** .

Le plus petit réel  $p$  **strictement positif** qui vérifie la définition s'appelle **la période de la fonction  $f$** .

**Exemples :** ➤ Soit la fonction  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
$$x \mapsto \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)+1}$$

- 1- Déterminer l'ensemble de définition de la fonction  $g$ .
- 2- Montrer que la fonction  $g$  est périodique et déterminer sa période.

**Propriété :**

Si  $f$  est une fonction périodique de période  $T$  alors pour tout  $k$  dans  $\mathbb{Z}$ ,  $kT$  est une période de  $f$ .

**Exercice :** Démontrer par récurrence sur  $k$  la propriété précédente.

Envisager deux cas :  $k = n$  et  $k = -n$  où  $n$  est un entier naturel.

**Courbe d'une fonction périodique :**

**Théorème :**

Soit  $f$  une fonction périodique de période  $p$  et dont l'ensemble de définition  $D_f$ . On pose :

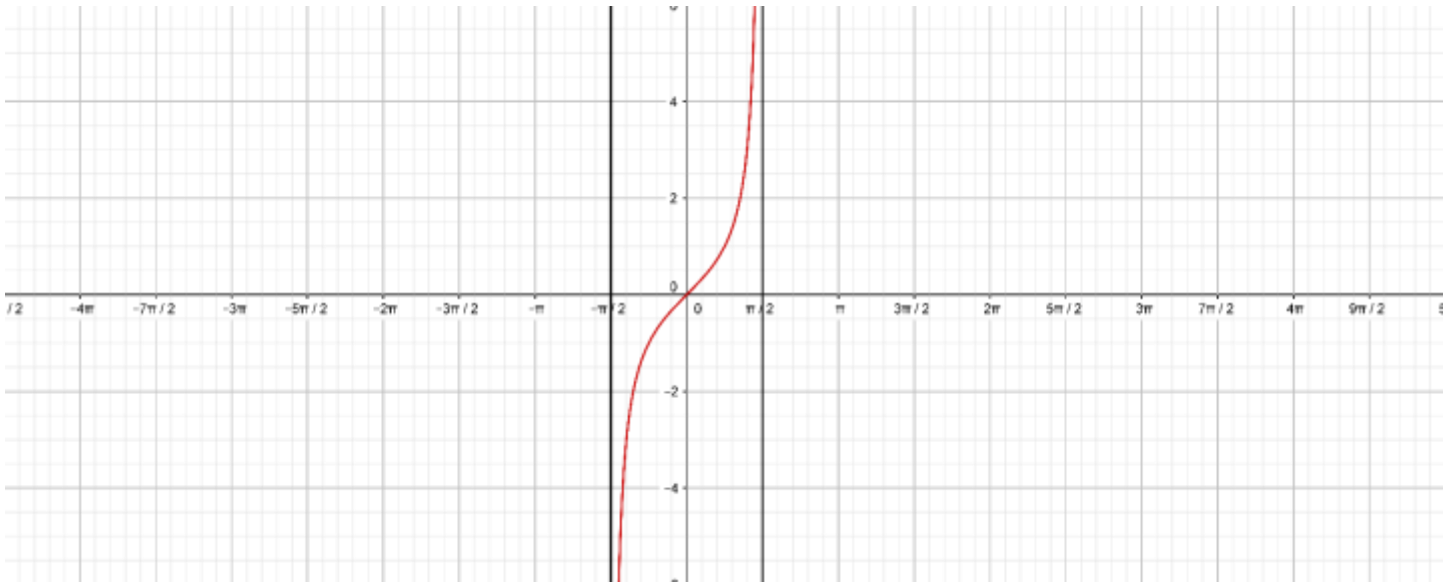
$D_k = [a_0 + kT, a_0 + (k + 1)T] \cap D_f$  où  $a_0$  est un élément de  $D_f$  et  $C_k$  la courbe de la restriction de  $f$  sur  $D_k$ .  
 $C_k$  est l'image de  $C_0$  par la translation  $t_k$  de vecteur  $\vec{u}_k \begin{pmatrix} kT \\ 0 \end{pmatrix}$

**Preuve :** En exercice.

**Remarque :**

La courbe  $C_f$  est la réunion de toutes les courbes  $C_k$  où  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $C_f = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} C_k$

**Exercice :**



La courbe ci-dessus est la courbe de la restriction de la fonction  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)+1}$  sur l'intervalle  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

On a montré que cette fonction est périodique de période  $\pi$ , continuer à tracer la courbe  $C_f$  sur  $[-2\pi, 2\pi]$

## IV) FONCTION MAJOREE, MINOREE, BORNEE

### 1) Activité

**Activité 1 :** Soit la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$

En utilisant la forme canonique du trinôme  $f$ , montrer que  $(\forall x \in \mathbb{R})(f(x) \geq -1)$

**Activité 2 :**

Soit la fonction  $h$  définie par : 
$$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$$

1- Déterminer l'ensemble de définition de la fonction  $h$  et étudier sa parité.

2- Construire la courbe de la restriction de  $h$  sur  $[0, +\infty[$ , puis construire  $C_f$

3-Montrer que  $(\forall x \in \mathbb{R})(h(x) < 1)$  et que  $(\forall x \in \mathbb{R})(h(x) > -1)$

4- La fonction  $h$  admet-elle un maximum absolu ?

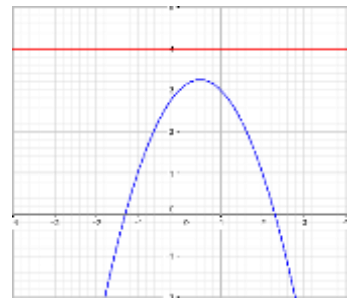
### Définitions

Soit  $f$  une fonction numérique dont l'ensemble de définition est  $D_f$ , et  $D$  une partie de  $D_f$ .

- On dit que :  $f$  est **majorée** sur  $D$  si  $(\exists M \in \mathbb{R})(\forall x \in D)(f(x) \leq M)$
- On dit que :  $f$  est **minorée** sur  $D$  si  $(\exists m \in \mathbb{R})(\forall x \in D)(f(x) \geq m)$
- On dit que  $f$  est **bornée** sur  $D$  si elle est majorée et minorée sur  $D$ .

### Remarque :

- Quand une fonction est majorée sur son ensemble de définition, on se contente de dire qu'elle est majorée.
- Un majorant  $M$  d'une fonction  $f$  sur  $D_f$  n'est pas nécessairement extremum absolu. Dans la courbe ci-contre 4 est un majorant de  $f$  mais pas un extremum absolu (Il n'y a pas de réel  $\alpha$  qui vérifie que  $f(\alpha) = 4$ )



### Exemple :

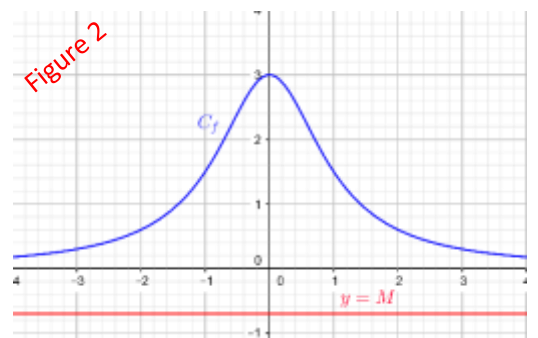
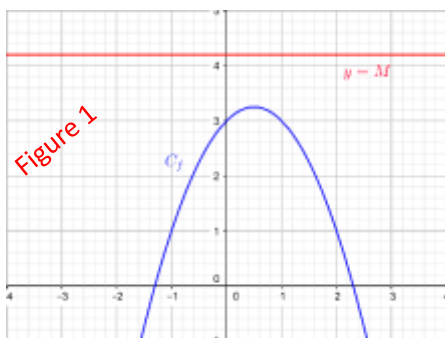
- La fonction  $h$  dans l'activité 2 est majorée par 1 et minorée par  $-1$ .
- La fonction  $f$  dans l'activité 1 est minorée. Montrer par absurde que  $f$  ne peut pas être majorée.

### Propriété :

- Si  $f$  est une fonction majorée par  $M$  alors elle est majorée par tout nombre  $M'$  tel que :  $M' \geq M$ .
- Si  $f$  est une fonction minorée par  $m$  alors elle est minorée par tout nombre  $m'$  tel que :  $m' \leq m$ .

### Interprétations géométrique :

- La courbe d'une fonction majorée par  $M$  est au-dessous de la droite  $D: y = M$  (figure 1)
- La courbe d'une fonction minorée par  $m$  est au-dessus de la droite  $D: y = m$  (figure 2)



### Propriété :

Soit  $f$  une fonction numérique dont l'ensemble de définition est  $D_f$  ;  $f$  est bornée si et seulement si :  $(\exists \alpha \in \mathbb{R}^+)(\forall c \in D_f)(|f(x)| \leq \alpha)$

# V) COMPARAISON DE DEUX FONCTIONS

## 1) Signe d'une fonction

### Activité :

Soit la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = 2x^2 + x + 1$

Montrer que  $(\forall x \in \mathbb{R})(f(x) \geq 0)$

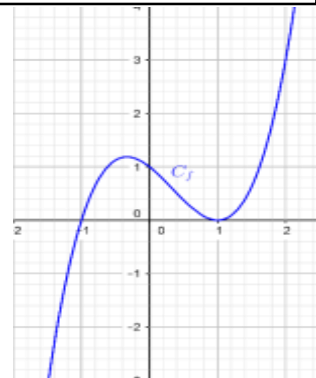
### Définition :

Soit  $f$  une fonction dont l'ensemble de définition est  $D_f$ , et  $D$  une partie de  $D_f$ .

- On dit que :  $f$  est positive sur  $D$  si  $(\forall x \in D)(f(x) \geq 0)$ .
- On dit que :  $f$  est négative sur  $D$  si  $(\forall x \in D)(f(x) \leq 0)$ .

### Remarque :

- Si  $f$  est positive sur  $D_f$  on dit que  $f$  est positive et on écrit :  $f \geq 0$
- Si  $f$  est négative sur  $D_f$  on dit que  $f$  est négative et on écrit :  $f \leq 0$
- Une fonction positive est minorée par 0, par contre une fonction négative est majorée par 0.



### Exemple :

Sur la courbe ci-contre la fonction  $f$  change de signe :  
 $f$  est négative sur  $] -\infty, -1[$  et positive sur  $[-1, +\infty[$

### Définition :

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions dont les domaines de définitions sont respectivement  $D_f$  et  $D_g$  et  $D$  une partie commune entre  $D_f$  et  $D_g$  ( $D \subset D_f \cap D_g$ )

On dit que  $f$  est plus grande que  $g$  sur  $D$  si  $(\forall x \in D)(f(x) \geq g(x))$  et on écrit  $f \geq g$  sur  $D$

### Interprétation géométrique :

Si  $f \geq g$  sur  $D$  alors  $C_f$  est au-dessus de  $C_g$

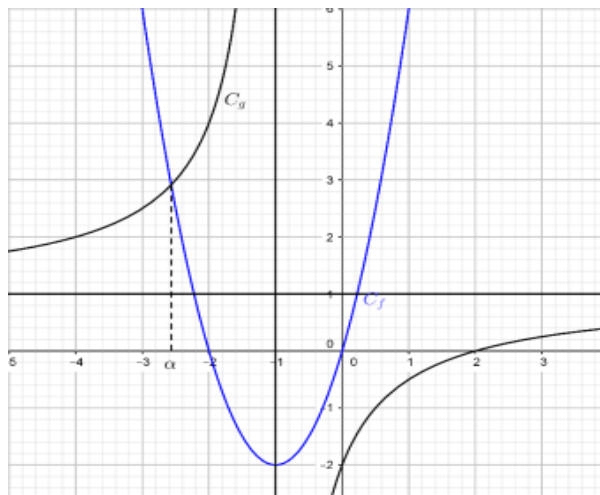
### Exemple :

Sur la figure ci-contre  $C_f$  est la courbe de la fonction

$f(x) = 2x^2 + 4x$  et  $C_g$  est la courbe représentative de

la fonction  $g(x) = \frac{x-2}{x+1}$

- Sur  $[\alpha, -1[$  on a :  $g \geq f$ .
- Sur  $] -\infty, \alpha] \cup ] -1, +\infty[$  on a  $f \geq g$



### Exercice :

Considérons les fonctions  $f(x) = x^2 - 2x$  et  $g(x) = \frac{2x}{x-1}$

1- Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $f(x) = g(x)$

2- Construire les courbes  $C_f$  et  $C_g$

3- Nous définissons le réel  $\text{Sup}(a, b)$  par :  $\text{Sup}(a, b) = a$  si  $a \geq b$ .

Soit la fonction  $h$  définie par :

$$h(x) = \text{sup}(f(x), g(x))$$

a) Donner une expression de  $h$  en fonction de  $x$

b) Construire la courbe représentative de  $h$ .

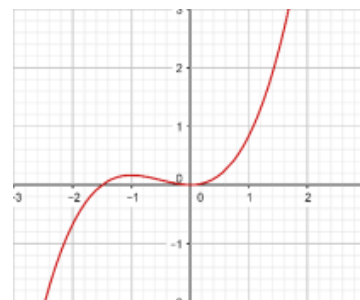
## VI) VARIATION D'UNE FONCTION ET EXTREMUMS

### 1) Activités et définition.

#### Activité 1 :

A partir de la courbe ci-contre d'une fonction  $f$ ,

- 1-Déterminer la monotonie de  $f$  sur les intervalles  $] -\infty, -1 ]$ ;  $[-1, 0]$  et sur  $[0, +\infty[$
- 2-Dresser le tableau de variations de la fonction  $f$ .
- 3-Déterminer les extremums de la fonction  $f$  et leurs natures.



#### Activité 2 :

Soit la fonction  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto |x^2 + x - 2|$

- 1- Ecrire des expressions de la fonction  $g$  sans la valeur absolue.
- 2- Etudier la monotonie de la fonction  $g$
- 3- Dresser le tableau de variation de la fonction  $g$ .
- 4- Déterminer les extremums de la fonction  $f$  et leurs natures.

#### Activité 3 :

Soit la fonction  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto x^2 + 4x + 1$

Montrer que la fonction  $h$  n'admet pas de maximum absolue.

#### Définitions :(Monotonie d'une fonction)

Soit  $f$  une fonction numérique à variable réelle dont l'ensemble de définition est  $D_f$ .  $I$  un intervalle de  $D_f$ .

- On dit que :  $f$  est **croissante** sur  $I$  si :  $(\forall (a, b) \in I^2)(a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b))$
- On dit que :  $f$  est **strictement croissante** sur  $I$  si :  $(\forall (a, b) \in I^2)(a < b \Rightarrow f(a) < f(b))$
- On dit que :  $f$  est **décroissante** sur  $I$  si :  $(\forall (a, b) \in I^2)(a \leq b \Rightarrow f(a) \geq f(b))$
- On dit que :  $f$  est **strictement décroissante** sur  $I$  si :  $(\forall (a, b) \in I^2)(a < b \Rightarrow f(a) > f(b))$
- On dit que  $f$  est **monotone** sur l'intervalle  $I$  s'il est croissante ou bien décroissante sur  $I$ .
- On dit que  $f$  est **strictement monotone** sur l'intervalle  $I$  s'il est strictement croissante ou bien strictement décroissante sur  $I$ .

### 2) Taux de variation d'une fonction

#### 2.1 Définition

##### Définition :

Soit  $f$  une fonction dont  $D_f$  est son ensemble de définition ;  $I$  un intervalle inclus dans  $D_f$ .  $a$  et  $b$  deux éléments distincts de  $I$  ; le nombre  $T_{(a,b)} = \frac{f(a)-f(b)}{a-b}$  s'appelle le **taux d'accroissement de la fonction  $f$  entre  $a$  et  $b$** .

##### Théorème :

Soit  $f$  une fonction dont  $D_f$  est son ensemble de définition ;  $I$  un intervalle inclus dans  $D_f$ .

- la fonction  $f$  est **croissante sur  $I$**  si et seulement si  $(\forall (a, b) \in I^2)(a \neq b \Rightarrow T_{(a,b)} \geq 0)$
- la fonction  $f$  est **décroissante sur  $I$**  si et seulement si  $(\forall (a, b) \in I^2)(a \neq b \Rightarrow T_{(a,b)} \leq 0)$

**Preuve :** En exercice

##### Exercices :

- 1- Etudier la monotonie de la fonction  $f(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{x}$  sur  $\mathbb{R}$ .
- 2- Etudier la monotonie de la fonction  $g(x) = \frac{x}{x^2+1}$  sur  $[0, 1]$  et sur  $[1, +\infty[$

## 2.2 Monotonie et parité :

### Propriété :

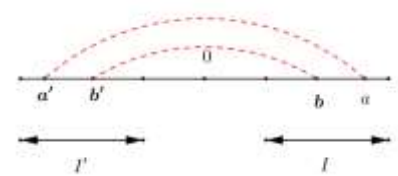
- Soit  $f$  une fonction **paire** dont le domaine de définition est  $D_f$ ,  $I$  un intervalle dans  $D_f \cap \mathbb{R}^+$ , et  $I'$  son symétrique par rapport à 0.
- si  $f$  est croissante sur  $I$  alors elle est décroissante sur  $I'$
  - si  $f$  est décroissante sur  $I$  alors elle est croissante sur  $I'$
- Soit  $f$  une fonction **impaire** dont le domaine de définition est  $D_f$ ,  $I$  un intervalle dans  $D_f \cap \mathbb{R}^+$ , et  $I'$  son symétrique par rapport à 0.
- si  $f$  est croissante sur  $I$  alors elle est décroissante sur  $I'$
  - si  $f$  est décroissante sur  $I$  alors elle est croissante sur  $I'$

### Preuve :

On suppose que  $f$  est paire : soit  $I$  un intervalle dans  $D_f \cap \mathbb{R}^+$ , et  $I'$  son symétrique par rapport à 0.

Soient  $a'$  et  $b'$  deux éléments de  $I'$  alors il existe  $a$  et  $b$  dans  $I$  tels que  $a' = -a$  et  $b' = -b$

$$\begin{aligned} T_{f_{I'}} &= \frac{f(a') - f(b')}{a' - b'} = \frac{f(-a) - f(-b)}{(-a) - (-b)} \\ &= \frac{f(a) - f(b)}{-(a-b)} \quad (\text{car } f \text{ est paire}) \\ &= -T_{f_I} \end{aligned}$$



## 3) Extremums

### 3.1 Extremums absolues

**Activité :** Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \frac{2}{1+x^2}$  ; Montrer que  $(\forall x \in \mathbb{R})(f(x) \leq f(0))$

### Définition :

Soit  $f$  une fonction numérique dont l'ensemble de définitions est  $D_f$

- On dit que  $f$  admet un maximum absolu en  $\alpha$  si :  $(\forall x \in D_f)(f(x) \leq f(\alpha))$ . On écrit :  $\max_{x \in D_f} f(x) = f(\alpha)$
- On dit que  $f$  admet un minimum absolu en  $\alpha$  si :  $(\forall x \in D_f)(f(x) \geq f(\alpha))$ . On écrit :  $\min_{x \in D_f} f(x) = f(\alpha)$

### Remarque :

Si  $f$  admet un maximum absolu en  $\alpha$  alors  $f(\alpha)$  est un majorant de  $f$

Si  $f$  admet un minimum absolu en  $\alpha$  alors  $f(\alpha)$  est un minorant de  $f$

### 3.2 Extremums relatifs

**Activité :** Soit la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = \frac{x}{1+x^2}$

- 1- Etudier la parité de la fonction  $g$ .
- 2- Etudier les variations de la fonction  $g$  sur  $[0,1]$  et sur  $[1, +\infty[$
- 3- Dresser le tableau de variation de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

### Définition :

Soit  $f$  une fonction numérique dont l'ensemble de définitions est  $D_f$

- On dit que  $f$  admet un **maximum relatif** en  $\alpha$  s'il existe un **intervalle ouvert inclus dans  $D_f$**  tel que :  $(\forall x \in I)(f(x) \leq f(\alpha))$ .
- On dit que  $f$  admet un **minimum relatif** en  $\alpha$  s'il existe un **intervalle ouvert inclus dans  $D_f$**  tel que :  $(\forall x \in I)(f(x) \geq f(\alpha))$ .





$$2) f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

**Propriété :**

Soit  $f$  la fonction homographique définie sur  $\mathbb{R} - \{-\frac{d}{c}\}$  par  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$  où  $c \neq 0$  et  $ad - bc \neq 0$

Ils existent trois réels  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  tels que pour tout  $x$  dans  $D_f$  on a :  $f(x) = \beta + \frac{\gamma}{x-\alpha}$

La courbe  $C_f$  est l'image de la courbe  $(\Gamma)$  représentative de la fonction  $x \rightarrow \frac{\gamma}{x}$  par la translation  $t$  de vecteur  $\vec{u} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ . La courbe  $C_f$  dans un repère orthogonal est une hyperbole de centre  $\Omega(\alpha, \beta)$  et d'asymptote les droites  $(\Delta): x = \frac{-d}{c}$  et  $(\Delta'): y = \frac{a}{c}$ .

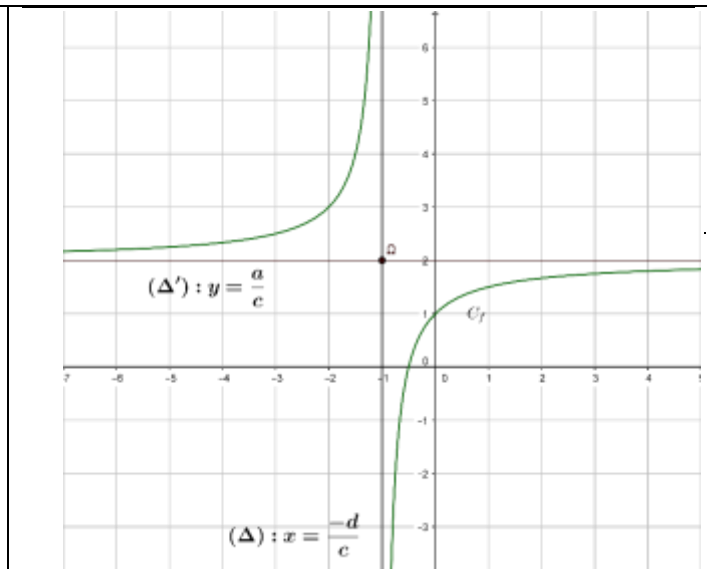
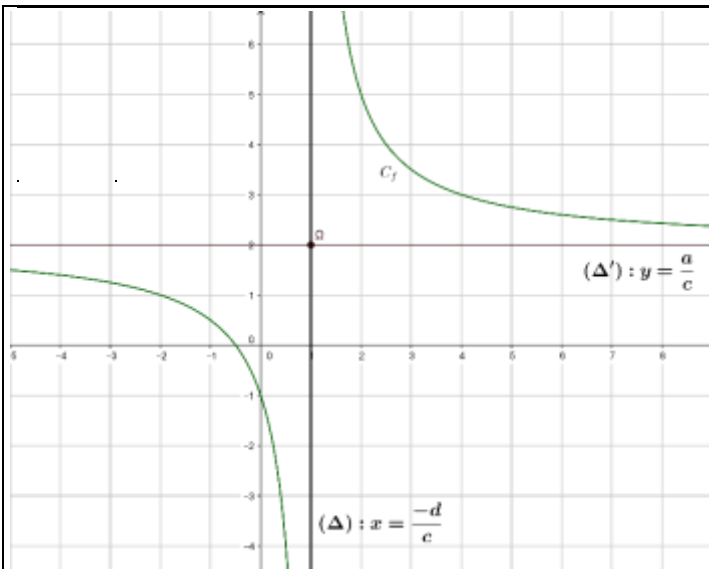
Pour les variations de  $f$  on envisage les deux cas suivants :

Si  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} < 0$  :

$x$	$-\infty$	$\frac{-d}{c}$	$+\infty$
$f(x)$	$\frac{a}{c}$	$+\infty$	$\frac{a}{c}$
	↘		↘
		$-\infty$	

Si  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} > 0$  :

$x$	$-\infty$	$\frac{-d}{c}$	$+\infty$
$f(x)$	$\frac{a}{c}$	$+\infty$	$\frac{a}{c}$
	↗		↗
		$-\infty$	



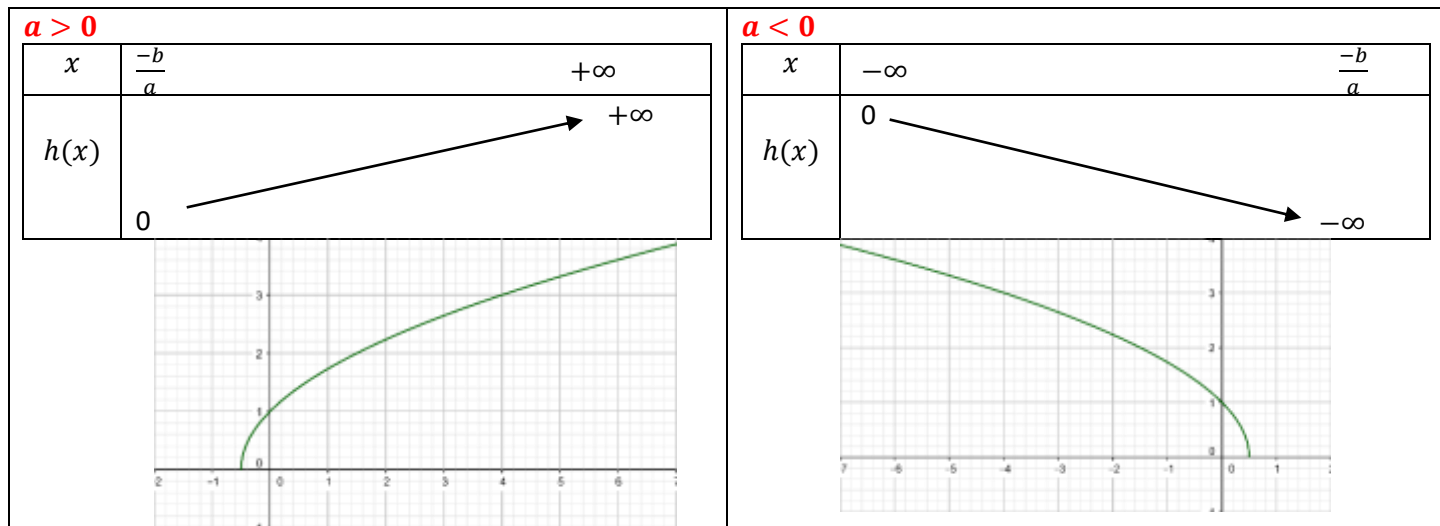
### 3) $f(x) = \sqrt{ax + b}$

#### Activité :

Soit  $g$  la fonction définie par :  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto \sqrt{ax + b}$  où  $a \neq 0$

- 1- Déterminer suivant les valeurs de  $a$  l'ensemble de définition de  $g$ .
- 2- Déterminer le taux d'accroissement de la fonction  $g$  en deux réels  $x_1$  et  $x_2$  de  $D_g$
- 3- Dresser suivant les valeurs de  $a$  le tableau de variation de la fonction  $g$ .

#### Propriété :



#### 4) $f(x) = ax^3$

##### Activité :

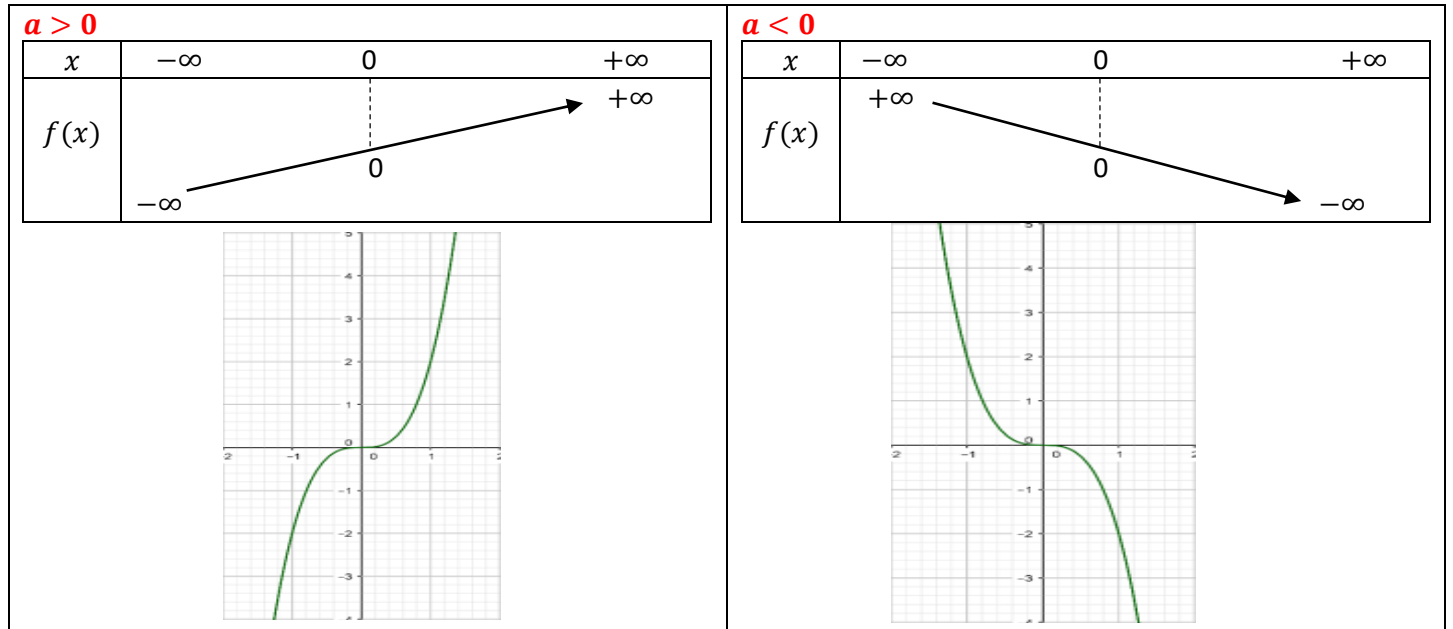
Soit  $h$  la fonction définie par :  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto ax^3$  où  $a \neq 0$

1- Montrer que  $h$  est une fonction impaire.

2- Montrer que le signe du taux d'accroissement de  $h$  sur  $\mathbb{R}^+$  est le signe de  $a$

3- Dresser suivant les valeurs de  $a$  le tableau de variation de  $h$

##### Propriété :

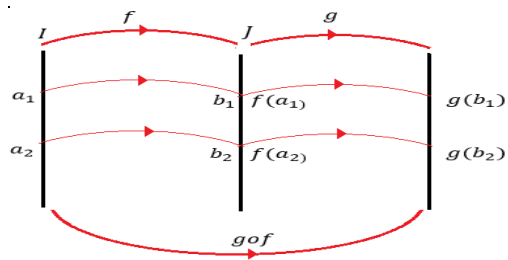


### VIII) MONOTONIE DE LA COMPOSITION DE DEUX FONCTION.

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions dans les ensembles des définitions respectifs  $D_f$  et  $D_g$  ;  $I$  un intervalle de  $D_f$  et  $J$  un intervalle de  $D_g$  tels que :  $f(I) = J$

Soient  $a_1$  et  $a_2$  deux éléments de  $I$  tels que :  $f(a_1) = b_1$  et  $f(a_2) = b_2$

$$\begin{aligned}
 \text{On a : } T_{g \circ f} &= \frac{(g \circ f)(a_1) - (g \circ f)(a_2)}{a_1 - a_2} \\
 &= \frac{g(f(a_1)) - g(f(a_2))}{a_1 - a_2} \\
 &= \frac{g(b_1) - g(b_2)}{b_1 - b_2} \times \frac{b_1 - b_2}{a_1 - a_2} \\
 &= \frac{g(b_1) - g(b_2)}{b_1 - b_2} \times \frac{f(a_1) - f(a_2)}{a_1 - a_2} \\
 &= T_g \times T_f
 \end{aligned}$$



##### Propriété :

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions dans les ensembles des définitions respectifs  $D_f$  et  $D_g$  ;  $I$  un intervalle de  $D_f$  et  $J$  un intervalle de  $D_g$  tels que  $f(I) = J$

- Si  $f$  est **croissante** sur  $I$  et  $g$  est **croissante** sur  $J = f(I)$  alors  $g \circ f$  est **croissante** sur  $I$ .
- Si  $f$  est **décroissante** sur  $I$  et  $g$  est **décroissante** sur  $J = f(I)$  alors  $g \circ f$  est **croissante** sur  $I$ .
- Si  $f$  est **croissante** sur  $I$  et  $g$  est **décroissante** sur  $J = f(I)$  alors  $g \circ f$  est **décroissante** sur  $I$ .
- Si  $f$  est **décroissante** sur  $I$  et  $g$  est **croissante** sur  $J = f(I)$  alors  $g \circ f$  est **décroissante** sur  $I$ .

### Exercice 1 :

Soient les fonctions :  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto \frac{2x+1}{x+1}$  et  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto \sqrt{2x+1}$  et  $h = f \circ g$

- 1- Exprimer  $h(x)$  en fonction de  $x$ .
- 2- Déterminer  $D_h$  en semple de définition de  $h$ .
- 3- Dresser les tableaux de variation de  $f$  et  $g$ .
- 4- En déduire les variations de  $h$ .

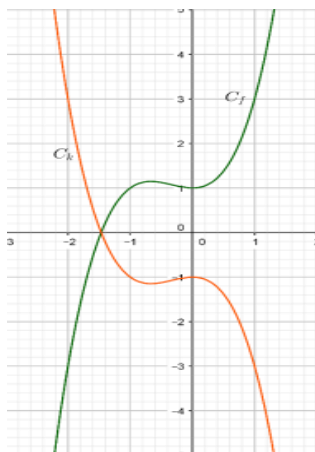
### Exercice 2 :

Soit la fonction  $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x + 3$

- 1- Montrer que  $(\forall x \in \mathbb{R})(u(x) = (v \circ t)(x))$  où  $t(x) = -x^2 + 2x$  et  $v(x) = x^2 + 2x + 3$
- 2- Dresser les tableaux de variation de  $v$  et  $t$
- 3- En déduire les variations de  $u$ .

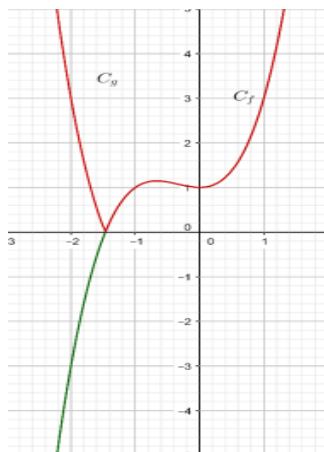
## IX) REMARQUES SUR LES GRAPHES.

Soit  $f$  une fonction numérique dont la courbe représentative  $C_f$



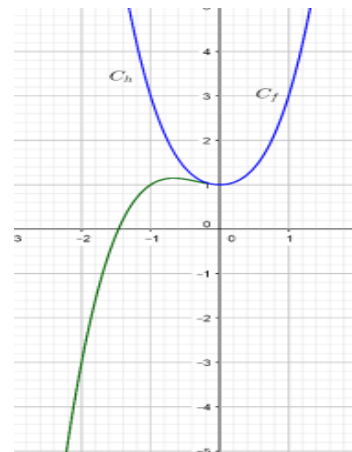
$$k(x) = -f(x)$$

$C_k$  et  $C_f$  sont symétrique par rapport à l'axe  $(Ox)$



$$h(x) = |f(x)|$$

- Si  $f(x) \geq 0$  alors  $h(x) = f(x)$  et dans ce cas  $C_h$  et  $C_f$  seront confondues.
- Si  $f(x) \leq 0$  alors  $h(x) = -f(x)$  et dans ce cas  $C_h$  et  $C_f$  seront t symétrique par rapport à l'axe  $(Ox)$



$$g(x) = f(|x|)$$

Si  $x \geq 0$  alors

$g(x) = f(x)$  et dans ce cas  $C_g$  et  $C_f$  sont confondues.

La fonction  $g$  étant paire alors  $C_g$  est symétrique par rapport à l'axe  $(Oy)$