# ANALYTIQUE DU PRODUIT SCALAIRE DANS LE PLAN EN 1 BAC

JAOUAD filali

## I) REPERE ORTHONORME DANS LE PLAN

**DÉFINITIONS :**

Soit $\beta(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ une base de $\mathcal{V}_2$.

- La base $\beta$ est dite **orthogonale** si $\vec{\imath}.\vec{\jmath}=0$
- La base $\beta$ est dite **normée si** $\|\vec{\imath}\|=\vec{\jmath}=1$
- Une base orthogonale et normée s'appelle une base orthonormée.

Soit $\mathcal{R}(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère du plan $(\mathcal{P})$

- On dit que le repère $\mathcal{R}$ est orthonormé si la base $\beta(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ associé à $\mathcal{R}$ est orthonormée.

## II) EXPRESSION ANALYTIQUE DU PRODUIT SCALAIRE.

Soit $\beta(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ une base orthonormée de $\mathcal{V}_2$. et $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\overrightarrow{u'}\binom{x'}{y'}$ deux vecteurs de $\mathcal{V}_2$ ; on a :

$\vec{u}=x\,\vec{\imath}+y\,\vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{u'}=x'\,\vec{\imath}+y'\,\vec{\jmath}$

$$\vec{u}.\overrightarrow{u'}=(x\,\vec{\imath}+y\,\vec{\jmath}).(x'\vec{\imath}+y'\vec{\jmath})$$

$$=xx'\,\vec{\imath}^2+xy'\;\;\vec{\imath}.\vec{\jmath}+y\,x'\;\;\vec{\jmath}.\;\;\vec{\imath}+yy'\,\vec{\jmath}^2$$

$$=xx'+yy'$$

**PROPRIÉTÉ :**

L'espace $\mathcal{V}_2$ est rapporté à une base orthonormée $\beta(\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Soient $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\overrightarrow{u'}\binom{x'}{y'}$ deux vecteurs de $\mathcal{V}_2$ on a :

- $\vec{u}.\overrightarrow{u'}=\;xx'+yy'$
- $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2}$
- $\vec{u}\perp\overrightarrow{u'}\Leftrightarrow xx'+yy'=0$

Si $A(x_A,y_A)$ et $B(x_B,y_B)$ alors $AB=\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

## III) PRODUIT SCALRE ET LIGNES TRIGONOMETRIQUES.

### L'EXPRESSION DE COS ET SIN

L'espace $\mathcal{V}_2$ est rapporté à une base orthonormée $\beta(\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Soient $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{v}\binom{x'}{y'}$ deux vecteurs de $\mathcal{V}_2$ on a :

$\vec{u}.\vec{v}=\;xx'+yy'=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\vec{u},\vec{v})$

Par suite : $cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})=\frac{xx'+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}\times\sqrt{x'^2+y'^2}}$

**Theoréme :**

L'espace $\mathcal{V}_2$ est rapporté à une base orthonormée $\beta(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ ; Soient $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{v}\binom{x'}{y'}$.

$$cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})=\frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}=\frac{xx'+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}\times\sqrt{x'^2+y'^2}}\quad \text{et}\quad sin(\widehat{\vec{u},\vec{v}})=\frac{\det(\vec{u},\vec{v})}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}=\frac{xy'-x'y}{\sqrt{x^2+y^2}\times\sqrt{x'^2+y'^2}}$$

filali jaouad

# IV) DE L'INEGALITE DE CAUCHY-SCHWARZ

L'inégalité de Cauchy-Schwarz

- Pour tout vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on a : $\vec{u}.\vec{v} \leq |\vec{u}.\vec{v}| \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$.
- l'égalité est vérifiée si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

L'inégalité triangulaire.

- Pour tout vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on a : $\|\vec{u}+\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.
- l'égalité est vérifié si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens.

**Propriétés :**

L'espace vectoriel $\mathcal{V}_2$ est muni d'une base $\beta(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ orthonormée.

Soient $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{v}\binom{x'}{y'}$ on a :

- L'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\vec{u}.\vec{v} \leq |\vec{u}.\vec{v}| \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \Leftrightarrow \boldsymbol{xx'+yy' \leq |xx'+yy'| \leq \sqrt{x^2+y^2} \times \sqrt{x'^2+y'^2}}$$

- L'inégalité triangulaire.

$$\|\vec{u}+\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| \Leftrightarrow \boldsymbol{\sqrt{(x+x')^2+(y+y')^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{x'^2+y'^2}}$$

**Exercice :**

Dans le plan (P) muni d'un RON $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points : $A(5;1)$; $B(-1;3)$; $C(1;-1)$

**1)** Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ ; $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BC}$ .

**2)** **a)** Calculer $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ et $\det(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})$.

**b)** Calculer les distances $BA$ ; $BC$ et $AC$.

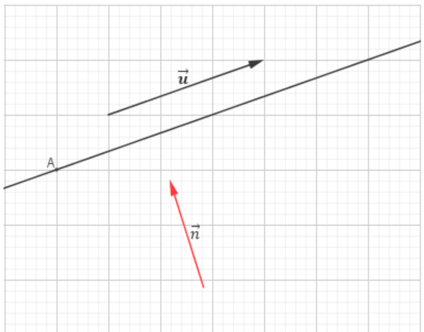
**c)** Calculer $\cos(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}})$ et $\sin(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}})$.

# V) DROITE DÉFINIE PAR UN POINT ET UN VECTEUR NORMAL.

## 1-VECTEUR NORMAL D'UNE DROITE

**Définition :**

Soit $D_{(A,\vec{u})}$ la droite passante par $A$ et de vecteur directeur $\vec{u}$ ; tout vecteur $\vec{n}$ **non nul et orthogonal à** $\vec{u}$ s'appelle un vecteur **normal sur la droite** $(D)$.




**Remarque :**

- Si $\vec{n}$ est normal sur une droite $(D)$ ; Tout vecteur non nul colinéaire avec $\vec{n}$ est aussi normal sur la droite $(D)$.
- Si $(D): ax+by+c=0$ est une droite dans le plan alors $\vec{u}\binom{-b}{a}$ est un vecteur directeur de la droite $(D)$, l vecteur $\vec{n}\binom{a}{b}$ est non nul et orthogonal à $\vec{u}$ donc normal sur la droite $(D)$.

## 2) EQUATION D'UNE DROITE DÉFINIE PAR UN POINT DONNÉ ET UN VECTEUR NORMAL.

Soient $A(x_A, y_A)$ un point donné, et $\vec{v}\binom{a}{b}$ un vecteur non nul. Soit $(D)$ la droite qui passe par $A$ et qui admet $\vec{v}$ comme vecteur normal.

$$M(x,y) \in (D) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{v} = 0$$

$$\Leftrightarrow \binom{x - x_A}{y - y_A}\cdot\binom{a}{b} = 0$$

$$\Leftrightarrow a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$$

$$\Leftrightarrow ax + by - (ax_A + by_A) = 0$$

**Propriété :**

Soients $A(x_A, y_A)$ un point donné, et $\vec{v}\binom{a}{b}$ un vecteur non nul. La $(D)$ la droite qui passe par $A$ et qui admet $\vec{v}$ comme vecteur normal a une équation cartésienne de la forme :$(D)$: $a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$

**Exercice :**

*Déterminer un vecteur normal à la droite $(\Delta)$ dans chacun des cas suivants :*

a. $(\Delta): x - 5y + 2 = 0$ b. $(\Delta): 2x + 5y - 1 = 0$

c. $(\Delta): 2x + \sqrt{2}y + 5 = 0$ d. $(\Delta): 2x + \sqrt{2}y + 5 = 0$

# VI) DISTANCE D'UN POINT PAR RAPPORT A UNE DROITE.

**1-DhFINITION :**

Soient $(D)$ une droite et $M_0$ un point dans le plan. La distance du point $M_0$ à la droite $(D)$ est la distance $M_0H$ où $H$ est la projection orthogonal de $M_0$ sur $(D)$. On la note : $d(M_0, (D))$

**2-THhORÎME :**

Soient $(D)$: $ax + by + c = 0$ une droite et $M_0(x_0, y_0)$ un point dans le plan. La distance du point $M_0$ à la droite $(D)$ est : $\boldsymbol{d(M_0,(D)) = M_0H = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$

**Exercice :**

*A est un point et $(D)$ est une droite du plan.*

*Déterminer la distance du point A à la droite $(D)$ dans chacun des cas suivants:*

a. $A(1;5)$ *et* $(D): -x\sqrt{2} + y - 5 = 0$.

b. $A(\sqrt{3};\sqrt{2})$ *et* $(D): x\sqrt{3} - y\sqrt{2} - 1 = 0$.

c. $A(-2;1)$ *et* $(D): 5x + 12y - 28 = 0$.

d. $A(0;-1)$ *et* $(D): y = 2x - 2$.