

# LIMITE D'UNE FONCTION

1SM

## I) RAPPELLES ET COMPLEMENTS.

$$]a, b[ = \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$$

- Le centre de l'intervalle  $]a, b[$  est le réel  $x_0 = \frac{a+b}{2}$
- Le rayon de l'intervalle  $]a, b[$  est le réel positif  $r = \frac{b-a}{2}$

### Activité :

Déterminer les bornes d'un intervalle ouvert de centre  $x_0$  et de rayon  $r$  (deux réels données)

### Définition :

L'ensemble :  $]a, b[* = \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\} / \{x_0\}$  où  $x_0$  est le centre de l'intervalle  $]a, b[$ , s'appelle l'intervalle pointé de bornes  $a$  et  $b$ .

### Remarque :

Si  $r$  est le rayon de l'intervalle  $]a, b[$  et  $x_0$  son centre alors :  $]a, b[* = ]x_0 - r, x_0 + r[ / \{x_0\}$

### Activité :

Montrer que  $x \in ]x_0 - r, x_0 + r[ / \{x_0\} \Leftrightarrow 0 < |x - x_0| < r$

### Activité :

1-Rappeler l'image d'un ensemble par une application.

2- Rappeler  $f(A) \subset B$

3- Traduire en utilisant les valeurs absolues :  $f(]x_0 - r, x_0 + r[*) \subset ]l - \beta, l + \beta[$

## II) LIMITE NULLE EN 0.

Considérons la fonction :  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto \frac{x^3}{|x|}$

1- Déterminer l'ensemble de définition de  $f$ .

2- Ecrire des expressions de  $f$  sur des intervalles sans valeur absolue.

3- La courbe de  $f$  est ci-contre :

- a)- Déterminer un réel  $\alpha$  tel que :  $f(]-\alpha, \alpha[*) \subset ]-2, 2[$
- b)- Déterminer un réel  $\alpha$  tel que :  $f(]-\alpha, \alpha[*) \subset ]-10^{-2}, 10^2[$
- c)- Déterminer un réel  $\alpha$  tel que :  $f(]-\alpha, \alpha[*) \subset ]-\varepsilon, \varepsilon[$

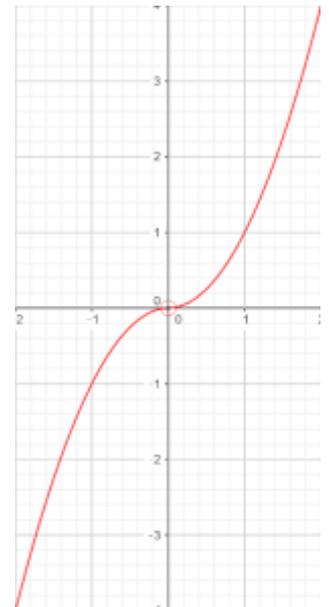
En répondant à la question 3-c) on peut conclure que :

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in D_f)(0 < |x| < \alpha \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$$

On dit que la fonction  $f$  admet 0 comme limite en 0. et on écrit :  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

### Définition :

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle pointé de centre 0. On dit que  $f$  admet la limite 0 en 0 si elle vérifie la propriété suivante :  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in D_f)(0 < |x| < \alpha \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$ . On écrit :  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ .



### Remarques :

- ✓ Le fait que  $f$  est définie sur un intervalle pointé est essentielle.  $g(x) = \sqrt{-x^2}$  est définie en 0 et n'admet pas de limite en 0.  $D_g = \{0\}$ .
- ✓ On a pas préciser si dans la définition si  $f$  est définie en 0 ou non, même si  $f$  est définie en 0, l'image de  $f$  en 0 n'affecte pas sur la limite.

$$f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ \begin{cases} x \mapsto \frac{x^3}{|x|} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \mapsto 5 \end{cases}$$

$$f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ \begin{cases} x \mapsto \frac{x^3}{|x|} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \mapsto -3 \end{cases}$$

On a :  $\lim_{x \rightarrow 0} f_1(x) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} f_2(x) = 0$

### Propriété :

Si  $f$  et  $g$  sont confondues sur un intervalle pointé de centre 0 et si  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$  alors  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$

### Propriété :

Les fonctions :  $x \mapsto x^n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) ;  $x \mapsto \sqrt{|x|}$  ;  $x \mapsto kx$  tendent vers 0 quand  $x$  tend vers 0.

## III) LIMITE FINIE EN $a$ .

### Définition :

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle pointé de centre  $a$  et  $l$  un réel. On dit que la fonction  $f$  tend vers  $l$  quand  $x$  tend vers  $a$  si :  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - l) = 0$ . c.-à-d. :

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in D_f)(0 < |x - a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

**Exercice :** Montrer en utilisant la définition que :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (ax + b) = (ax_0 + b) \quad (a \neq 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 1) = 2.$$

### Propriété :

Si  $P$  est une fonction polynôme alors :  $\lim_{x \rightarrow a} P(x) = P(a)$

Une fonction polynôme  $P$  c'est une fonction qui s'écrit de la forme :  $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$

### Exemple :

$$\lim_{x \rightarrow 2} 3x^2 + x + 3 = 17.$$

### Propriété :

Si sur un intervalle pointé de centre  $a$  on a :  $|f(x) - l| \leq u(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = 0$  alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$

### Application :

Déterminer :  $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ .

### Propriété :

Si  $f$  et  $g$  sont confondues sur un intervalle pointé de centre  $a$  et si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$  alors  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l$

### Exemple :

On se propose d'étudier la limite de la fonction  $f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$  en 0.

On remarque que  $(\forall x \in \mathbb{R}^*)(f(x) = \frac{x^2}{x(1+\sqrt{1+x^2})} = \frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}} = g(x))$  (on a multiplié par le conjugué)

D'autre part :  $(\forall x \in \mathbb{R}^*)(|g(x)| \leq |x|)$  et puisque :  $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$  alors  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$

et par suite :  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ .

### Propriété :

Si sur un intervalle pointé de centre  $a$  on a :  $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$  et si  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = l$  alors  
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$

### Propriété :

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle pointé de centre  $a$  ; on a :  $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$

### Remarque :

$$\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = l \Leftrightarrow \text{ou} \begin{cases} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -l \end{cases}$$

### Propriété :

Si  $f$  admet une limite  $l$  en  $a$  alors cette limite est **unique**.

## **III) LIMITE A DROITE, LIMITE A GAUCHE**

### 1) Définition

#### Activité :

Soit la fonction  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto x - E(x)$  où  $E$  désigne la partie entière.

- 1- Ecrire les expressions de  $f$  sans utiliser la partie entière sur les intervalles  $]0,1[$  et  $]1,2[$ .
- 2- Construire la courbe de la restriction de  $f$  sur  $[0,2]$ .
- 3- La fonction  $f$  admet-elle une limite en 1.
- 4- Soit la fonction  $g(x) = x$  et  $h(x) = x - 1$ 
  - a) Remarquer que  $f$  et  $g$  sont confondues sur  $]0,1[$  et que  $f$  et  $h$  sont confondues sur  $]1,2[$
  - b) déterminer les limite de  $g$  et de  $h$  en 1.

#### Définition :

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle de la forme  $]a, a + r[$  où  $r > 0$  et  $l$  un réel.

On dit que la fonction  $f$  tend vers  $l$  quand  $x$  tend vers  $a$  à droite si la proposition suivante est vraie :

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in D_f)(0 < x - a < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Et on écrit :  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = l$  ou  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l$

**Exercice :**

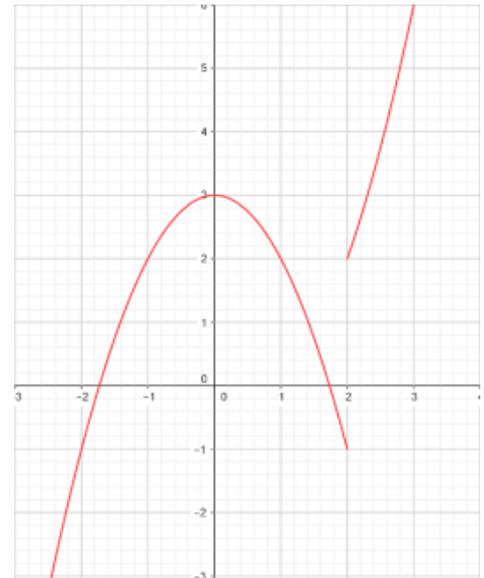
La courbe ci-contre est la courbe de la fonction définie par

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

morceaux comme suite :

$$\begin{cases} x \mapsto x^2 - x & \text{si } x \geq 2 \\ x \mapsto 3 - x^2 & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

Déterminer graphiquement les limites de la fonction  $f$  à droite et à gauche de 2.



**Exercice :**

Soit la fonction  $g$  définie par :

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \begin{cases} x \mapsto 2x^2 - x + 3 & \text{si } x \geq 1 \\ x \mapsto -x^2 + x + \alpha & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

Déterminer  $\alpha$  pour que la fonction  $g$  admette une limite en 1.

**Théorème :**

Une fonction  $f$  admet une limite  $l$  en  $a$  si et seulement si elle admet une limite à droite de  $a$  égale à sa limite à gauche de  $a$  égale à  $l$ .

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l \\ \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l \end{cases}$$

**2) Propriétés**

Toutes les propriétés mentionnées au paravent sont vraies à droite et à gauche de  $a$  en tenant compte des conditions

**Propriété :**

Si sur un intervalle de la forme  $]a, a + r[$  on a :  $|f(x) - l| \leq u(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow a^+} u(x) = 0$  alors  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l$

**Propriété :**

Si  $f$  et  $g$  sont confondues sur un intervalle de la forme  $]a, a + r[$  et si  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l$  alors  $\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = l$

**Propriété :**

Si sur un intervalle de la forme  $]a, a + r[$  on a :  $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$  et si  $\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} h(x) = l$  alors  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l$

On peut citer les mêmes propriétés à gauche de  $a$ .

**3) Opérations sur les limites finies.**

**Propriété :**

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions tels que :  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$   $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l'$  on a :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) &= l + l' & \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{1}{g}\right)(x) &= \frac{1}{l'} & l' \neq 0 \\ \lim_{x \rightarrow a} (f \times g)(x) &= l \times l' & \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{l}{l'} & l' \neq 0 \\ \lim_{x \rightarrow a} (|f|)(x) &= |l| & \lim_{x \rightarrow a} (\sqrt{f})(x) &= \sqrt{l} & l > 0 \end{aligned}$$

Ces propriétés sont vraies à droite et à gauche d'un réel  $a$ .

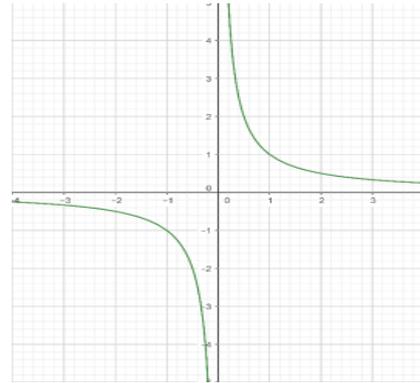
**Exemple :**  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{3x^2+1}+2x+1}{2x^2+3} = \frac{1}{5}$

# IV) EXTENSION DE LA NOTION DE LIMITE.

## 1) Limite infinie à droite (à gauche) de a.

### Activité :

Considérons la fonction  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto \frac{1}{x}$



La courbe représentative de  $f$  est l'hyperbole de centre  $O(0,0)$

1- Compléter le tableau suivant :

$x$	$10^{-2}$	$10^{-6}$	$10^{-20}$	...	$10^{-p}$
$f(x)$					

Que remarquer-vous ?

Considérons  $A = 10^{100}$  déterminer un réel  $\alpha$  tel que si  $0 < x < \alpha$  alors  $f(x) > 10^{100}$ .

Montrer que :

$$(P) : (\forall A > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in D_f)(0 < x < \alpha \Rightarrow f(x) > A)$$

La propriété (P) veut dire qu'on peut rendre  $f(x)$  aussi grand qu'on veut ; on dit que la limite de  $f$  est  $+\infty$  quand  $x$  tend vers 0 à droite et on écrit  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$

### Définition :

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle de la forme  $]a, a + r[$  où  $r > 0$ , on dit que la fonction  $f$  tend vers  $+\infty$  quand  $x$  tend vers  $a$  adroite si  $(\forall A > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in D_f)(0 < x - a < \alpha \Rightarrow f(x) > A)$

On écrit :  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$

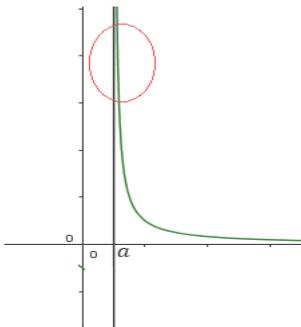
### Propriétés :

les fonctions  $x \mapsto \frac{k}{|x|}$  ;  $x \mapsto \frac{k}{\sqrt{|x|}}$  et  $x \mapsto \frac{k}{|x|^n}$  où  $k$  un réel strictement positif et  $n \in \mathbb{N}^*$ , tendent vers  $+\infty$  quand  $x$  tend vers 0.

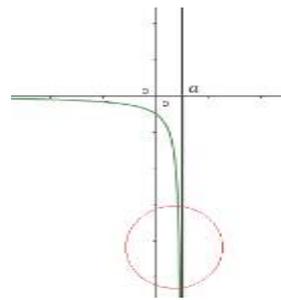
### Définitions :

- ✓  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty : (\forall A > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in D_f)(0 < x - a < \alpha \Rightarrow f(x) < -A)$
- ✓  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty : (\forall A > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in D_f)(0 < a - x < \alpha \Rightarrow f(x) > A)$
- ✓  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty : (\forall A > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in D_f)(0 < a - x < \alpha \Rightarrow f(x) < -A)$

### Interprétations géométriques :



$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$

**Définition :**

Si la fonction  $f$  vérifie l'une des limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty ; \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty ; \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty \text{ ou } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$$

Alors, on dit que la droite  $(\Delta): x = a$  est une **asymptote verticale**.

2) Limites finies en  $+\infty$

**Activité :** Considérons la fonction  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto \frac{1}{x}$

La courbe représentative de  $f$  est l'hyperbole de centre  $O(0,0)$

1- Compléter le tableau suivant :

$x$	$10^2$	$10^6$	$10^{20}$	...	$10^p$
$f(x)$					

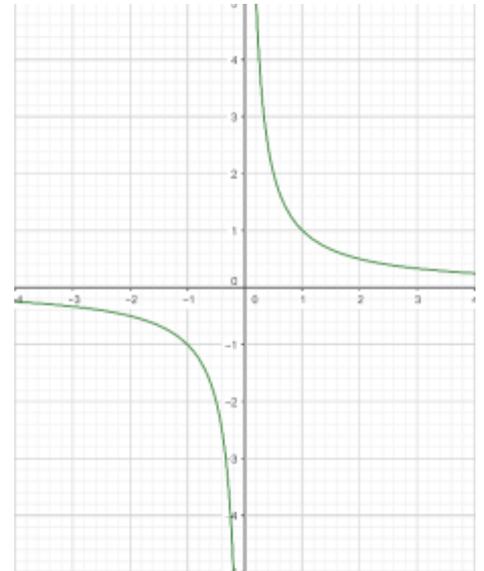
Que remarquer-vous ?

Considérons  $\varepsilon = 10^{-100}$  déterminer un réel  $B$  tel que si  $x > B$  alors

$$|f(x)| < \varepsilon .$$

En général, montrer que :

$$(P) : (\forall \varepsilon > 0)(\exists B > 0)(\forall x \in D_f)(x > B \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon)$$



**Définition :**

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle de la forme  $]a, +\infty[$  ( $a$  un réel quelconque) et  $l$  un réel, on dit que la fonction  $f$  tend  $l$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$  si :  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists B > 0)(\forall x \in D_f)(x > B \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$

On écrit :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$

**Propriétés :**

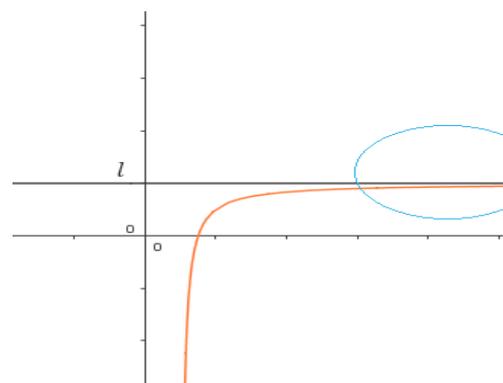
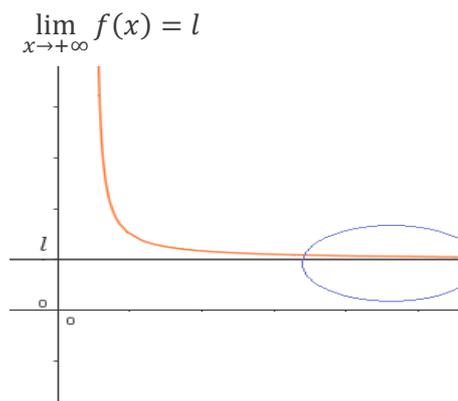
les fonctions  $x \mapsto \frac{k}{|x|}$  ;  $x \mapsto \frac{k}{\sqrt{|x|}}$  et  $x \mapsto \frac{k}{|x|^n}$  où  $k$  un réel donné et  $n \in \mathbb{N}^*$ , tendent vers 0 quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .

**Définitions :**

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle de la forme  $] - \infty, a[$  ( $a$  un réel quelconque) et  $l$  un réel, on dit que la fonction  $f$  tend  $l$  quand  $x$  tend vers  $-\infty$  si :  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists B > 0)(\forall x \in D_f)(x < -B \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$

On écrit :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$

**Interprétation géométrique :**



### Définition :

Si la fonction  $f$  vérifie l'une des limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$$

Alors, on dit que la droite  $(\Delta): y = l$  est une **asymptote horizontale**.

### Remarque :

La position de la courbe  $C_f$  par rapport à son asymptote horizontale se détermine par le signe de  $f(x) - l$  :

- Si  $f(x) - l \geq 0$  alors  $C_f$  est au-dessus de  $(\Delta): y = l$
- Si  $f(x) - l \leq 0$  alors  $C_f$  est au-dessous de  $(\Delta): y = l$

### 3) Limite infinies en $+\infty$

**Activité :** Considérons la fonction  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto x^2$

La courbe représentative de  $f$  est la parabole de centre  $O(0,0)$

1- Compléter le tableau suivant :

$x$	$10^2$	$10^6$	$10^{20}$	...	$10^p$
$f(x)$					

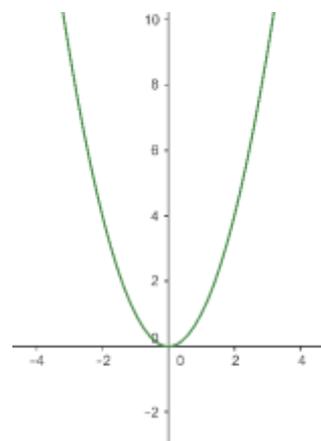
Que remarquer-vous ?

Considérons  $A = 10^{100}$  déterminer un réel  $B$  tel que si  $x > B$  alors

$$f(x) > A.$$

En général, montrer que :

$$(P) : (\forall A > 0)(\exists B > 0)(\forall x \in D_f)(x > B \Rightarrow f(x) > A)$$



### Définition :

Soit  $f$  une fonction  $]a, +\infty[$  (où  $a$  est un réel quelconque) on dit que la fonction  $f$  tend vers  $+\infty$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$  si :  $(\forall A > 0)(\exists B > 0)(\forall x \in D_f)(x > B \Rightarrow f(x) > A)$  ; on écrit :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

### Propriété :

Les fonctions  $x \mapsto x^2$  ;  $x \mapsto x^n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) ;  $x \mapsto \sqrt{x}$  et  $x \mapsto |x|$  tendent  $+\infty$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$

### Définitions :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  si  $(\forall A > 0)(\exists B > 0)(\forall x \in D_f)(x > B \Rightarrow f(x) > A)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$  si  $(\forall A > 0)(\exists B > 0)(\forall x \in D_f)(x > B \Rightarrow f(x) < -A)$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  si  $(\forall A > 0)(\exists B > 0)(\forall x \in D_f)(x < -B \Rightarrow f(x) > A)$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  si  $(\forall A > 0)(\exists B > 0)(\forall x \in D_f)(x < -B \Rightarrow f(x) < -A)$

# V) OPERATIONS SUR LES LIMITES.

## 1) Limites et ordres.

### Propriété :

Si sur un intervalle pointé de centre  $a$  on a :  $|f(x) - l| \leq u(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = 0$  alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$

### Propriété :

Si  $f$  et  $g$  sont confondues sur un intervalle pointé de centre  $a$  et si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$  alors  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l$

### Propriété :

Si sur un intervalle pointé de centre  $a$  on a :  $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$  et si  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = l$  alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$

Les propriétés précédentes sont vraies si  $x$  tend vers  $a$  à droite, ou  $a$  à gauche, ou  $+\infty$  ou  $-\infty$  en tenant compte des conditions pour chaque cas.

### Propriété

- Si sur un intervalle de la forme  $]a, a + r[$  on a :  $u(x) \leq v(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow a^+} u(x) = +\infty$  alors :  $\lim_{x \rightarrow a^+} v(x) = +\infty$
- Si sur un intervalle de la forme  $]a, a + r[$  on a :  $u(x) \leq v(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow a^+} v(x) = -\infty$  alors :  $\lim_{x \rightarrow a^+} u(x) = -\infty$

La propriété précédente est vraie si  $x$  tend vers  $a$  à gauche, ou  $+\infty$  ou  $-\infty$  en tenant compte des conditions pour chaque cas.

### Exercice :

Soit  $f(x) = \frac{2 + \sin(\frac{1}{x})}{x^2}$

1- Montrer que  $(\forall x \in \mathbb{R}^*)(f(x) \geq \frac{1}{x^2})$

2- En déduire  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

## 2) Opérations sur les limites

Toutes les propriétés qui seront citées dans ce paragraphe sous forme de tableau sont admises et on peut les démontrer en utilisant les définitions des limites.

### 1) Limite de la somme

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$l$	$l$		$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x)$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	<b>Formes indéterminées</b>

Ces propriétés sont vraies si  $x$  tend vers  $a^+$  ;  $a^-$  ;  $+\infty$  ou  $-\infty$

**Formes indéterminées** : Veut dire qu'on peut pas calculer la limite directement, il faut faire d'autres calculs car il y a plusieurs cas.

**Exemples :**

①  $f(x) = 2 + x^2$ ,  $g(x) = 5 - x^2$  on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f + g)(x) = 7$

②  $f(x) = 2 + x^2$ ,  $g(x) = 5 - x$  on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$  et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - x + 7 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{7}{x^2}\right) = +\infty$$

Dans les deux exemples on a le même cas que dans la dernière colonne du tableau mais on a deux résultats différents

**2) Limites des produits**

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$l$	$l > 0$ ou $+\infty$		$l < 0$ ou $-\infty$		$\pm\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$0$
$\lim_{x \rightarrow a} (f \times g)(x)$	$l.l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	<b>Formes indéterminées</b>

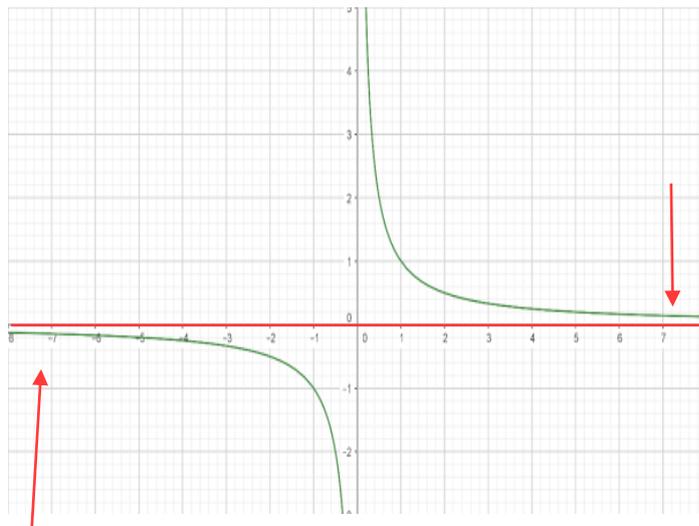
**3) Limites des inverses**

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$l \neq 0$	$0^+$	$0^-$	$\pm\infty$
-------------------------------	------------	-------	-------	-------------

$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{1}{f}\right)(x)$	$\frac{1}{l}$	$+\infty$	$-\infty$	$0$
--	---------------	-----------	-----------	-----

**Remarque :**  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0^+$  veut dire que  $f$  tend vers 0 mais de la droite.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0 (0^+)$   $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0 (0^-)$  chose qu'on voit bien sur la courbe de la fonction  $f$



**3) Limites des quotients**

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$l$	$l > 0$ ou $+\infty$		$l < 0$ ou $-\infty$		$0$	$\pm\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$l' \neq 0$	$0^+$	$0^-$	$0^+$	$0^-$	$0$	$\pm\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$	$\frac{l}{l'}$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	<b>Formes indéterminées</b>	<b>Formes indéterminées</b>

**Exemple :**

On veut déterminer la  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x+1}{x^2+x-2}$  on a :

On a :  $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} (3x + 1) = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + x - 2) = 0^+ \end{cases}$  Donc  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x+1}{x^2+x-2} = +\infty$

$x$	$-\infty$	$-2$	$1 \leftarrow$	$+\infty$
$x^2 + x - 2$	$+$	$0$	$-$	$0 \oplus$

**Exercices**

Déterminer les limites suivantes :  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - x}{2x^3 + 2x - 4}$   $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x+1} - 3}{x^2 - 3x + 2}$

### 3) Limites d'une fonction polynôme en $\pm\infty$

Soit  $f$  une fonction polynôme de degré  $n$  tel que :  $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$  avec  $a_n \neq 0$

On a :  $f(x) = a_nx^n \left( \frac{a_0}{a_nx^n} + \frac{a_1}{a_nx^{n-1}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_nx} + 1 \right)$  puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{a_0}{a_nx^n} + \frac{a_1}{a_nx^{n-1}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_nx} + 1 \right) = 1$  alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} a_nx^n$$

Même chose si  $x$  tend vers  $-\infty$

#### Propriété :

La limite d'une fonction polynôme en  $+\infty$  ( $-\infty$ ) est la limite de son plus grand terme en  $+\infty$  ( $-\infty$ )

### 4) Limites d'une fonction rationnelle en $\pm\infty$

Une fonction rationnelle est le rapport de deux fonctions polynômes :  $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$  où :

$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$  avec  $a_n \neq 0$  et  $g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_mx^m$  avec  $b_m \neq 0$

$$h(x) = \frac{a_nx^n \left( \frac{a_0}{a_nx^n} + \frac{a_1}{a_nx^{n-1}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_nx} + 1 \right)}{b_mx^m \left( \frac{b_0}{b_mx^m} + \frac{b_1}{b_mx^{m-1}} + \dots + \frac{b_{m-1}}{b_mx} + 1 \right)}$$
 et puisque :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{a_0}{a_nx^n} + \frac{a_1}{a_nx^{n-1}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_nx} + 1 \right) = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{b_0}{b_mx^m} + \frac{b_1}{b_mx^{m-1}} + \dots + \frac{b_{m-1}}{b_mx} + 1 \right) = 1 \text{ alors}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_nx^n}{b_mx^m}$$

Même chose si  $x$  tend vers  $-\infty$

#### Propriété :

La limite d'une fonction rationnelle en  $+\infty$  ( $-\infty$ ) est la limite du rapport des termes de plus grand degré en  $+\infty$  ( $-\infty$ )

#### Exemples :

$$1- \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x^3 + 2x^2 + 8}{3x^4 + 2x^2 - 5x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x^3}{3x^4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7}{3x} = 0$$

$$2- \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-6x^5 + 2x^4 + 8x}{5x^3 + 2x^2 + 5x + 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-6x^5}{5x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-6}{5}x^2 = -\infty$$

**Remarque :** La propriété précédente n'est vraie que si  $x$  tend vers  $+\infty$  ou  $-\infty$

**Exercice :** Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2\sqrt{x} - x\sqrt{x}}{x^3 + 2x\sqrt{x}}$  vous pouvez poser  $\sqrt{x} = t$

### 5) Limites des fonctions trigonométriques.

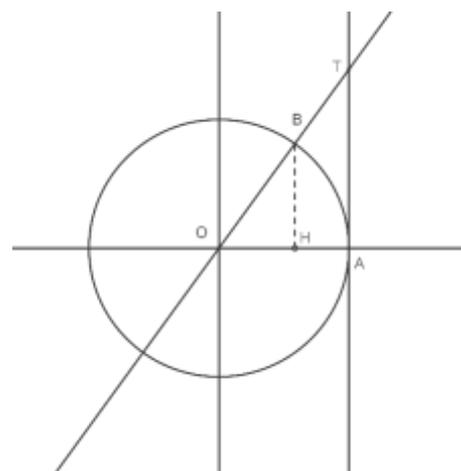
#### Activité :

Dans le plan muni d'un repère  $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j})$ , On considère le cercle trigonométrique d'origine  $A(1,0)$ .  $x \in ]0, \frac{\pi}{2}[$  et  $B$  le point sur le cercle trigonométrique tel que :  $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv x \ [2\pi]$ .

1- Déterminer en fonction de  $x$  la surface du domaine circulaire  $\mathcal{D}$  limité par  $[OA)$ ,  $[OB)$  et l'arc géométrique  $\widehat{AB}$

2- Soit  $H$  la projection orthogonale de  $B$  sur  $(OA)$ .

a) Déterminer en fonction de  $x$  l'aire du triangle  $OAB$



b) Comparer les aires du domaine  $\mathcal{D}$  et du triangle, que peut-on conclure ?

3- Montrer que :  $(\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]) (|\sin x| \leq |x|)$ .

4- Déterminer les limites  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x$  ;  $\lim_{x \rightarrow a} \sin x$  et  $\lim_{x \rightarrow a} \cos x$

5- Considérons la droite  $(\Delta)$  la droite tangente au cercle  $(\mathcal{C})$  en  $A$

a) Soit  $T$  l'intersection de  $(\Delta)$  et  $(OB)$ , Déterminer en fonction de  $x$  la surface de  $OAT$

b) En déduire que  $(\forall x \in ]0, \frac{\pi}{2}[) (x \leq \tan x)$

c) En déduire que  $(\forall x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[) (|x| \leq |\tan x|)$

6- En utilisant les résultats précédents. Montrer que :

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

**Propriété :**

Soit  $a$  un réel on a :

- $\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$
- $\lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$
- si  $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$   $\lim_{x \rightarrow a} \tan x = \tan a$

**Propriété :**

a.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

b.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

c.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

**Exercices :**

Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{\tan 3x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\cos x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\cos^2 x + \cos x - 3}{1 - \cos^2 x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x + \tan 2x}{\tan 3x + \tan 4x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \tan x}{\cos x - \sin x}$$