LES FONCTIONS LOGARITHMIQUES

I LE LOGARITHME NÉPÉRIEN

1-DÉFINITION :

Le logarithme népérien est la primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$ et qui s'annule en 1.
On la note ln. $\quad (\forall x \in]0,+\infty[) \ : \ \ln'(x) = \dfrac{1}{x}$

2-CONSÉQUENCES :

⋆ Le domaine de définition de ln est $]0,+\infty[$.
⋆ $\ln(1) = 0$.

⋆ ln est une fonction dérivable sur $]0,+\infty[$ et on a :

⋆ ln est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.
⋆ Pour tous a et b de $]0,+\infty[$:
- $a < b \Longleftrightarrow \ln(a) < \ln(b)$
- $\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$.

⋆ $\ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$
- $\ln(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$
- $\ln(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$.

3-UNE PROPRIÈTÉ FONDAMENTALE :

Pour tous a et b de $]0,+\infty[$: $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.

PROPRIÈTÉS

Pour tous a et b de $]0,+\infty[$ et r de $\mathbb{Q}$ on a :

⋆ $\ln(\dfrac{1}{a}) = -\ln(a)$ $\qquad$ ⋆ $\ln(\dfrac{a}{b}) = \ln(a) - \ln(b)$

⋆ $\ln(\sqrt{a}) = \dfrac{1}{2}\ln(a)$ $\qquad$ ⋆ $\ln(a^r) = r\ln(a)$

4-LES LIMITES :

⋆ $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ $\qquad$ ⋆ $\lim\limits_{x\to0^+} \ln(x) = -\infty$ $\qquad$ ⋆ $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\ln(x)}{x-1} = 1$

⋆ $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$ $\qquad$ ⋆ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ $\qquad$ ⋆ $\lim\limits_{x\to0^+} x.\ln(x) = 0$

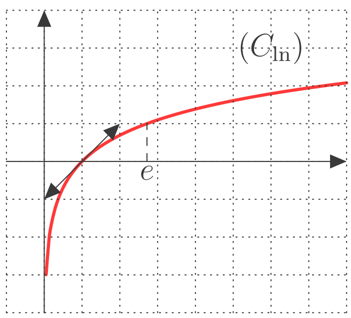
⋆ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^n} = 0$ $\qquad$ ⋆ $\lim\limits_{x\to0^+} x^n.\ln(x) = 0$ $\qquad$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$

Proposition :
L'équation $\ln(x) = 1$ admet une unique solution noté e telle que $e = 2,718....$

TABLEAU DE VARIATION DE LN :

x	0	$+\infty$
$\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$	‖	$+$
ln	‖	$-\infty \nearrow +\infty$

LA COURBE $(C_{\ln})$ DE LN:



II La dérivée logarithmique d'une fonction

1-Définition :

Soit u une fonction dérivable et ne s'annule jamais sur un intervalle I.

La fonction $x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ s'appelle La dérivée logarithmique de u sur I.

2-Propriètè :

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I telle qu'elle ne s'annule jamais sur I, alors la fonction $f : x \mapsto \ln(|u(x)|)$ est dérivable sur I et sa dérivée est La dérivée logarithmique de u.

càd $$(\forall x \in I)\ :\ f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

3-Theorème :

Soit u une fonction dérivable et ne s'annule jamais sur un intervalle I.

Les fonctions primitives de la fonction $x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ sur I sont les fonctions $x \mapsto \ln(|u(x)|) + C$ avec $C \in \mathbb{R}$.

III Le logarithme à base a ($a > 0$ et $a \neq 1$)

1-Définition :

Soit a un réel strictement positif et différent de 1.

Le logarithme à base a est la fonction noté $\log_a$ et définie sur $]0, +\infty[$ par : $\log_a(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$.

Si $a = 10$ on note $\log_{10} = \log$.

2-Propriètés

⋆ $\log_a(a) = 1$ ⋆ $\log_a(e) = \dfrac{1}{\ln(a)}$ ⋆ $\log_a(1) = 0$ ⋆ $\log_e = \ln$

3-Propritées :

Soient $x, y \in]0, +\infty[$ et $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. On a :

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y) \quad ; \quad \log_a\left(\frac{1}{y}\right) = -\log_a(y)$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y) \quad ; \quad \log_a(x^r) = r\log_a(x)\ ,\ (\forall r \in \mathbb{Q})$$

4-Propritées :

Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, la fonction $\log_a$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et on a :

$$(\forall x \in]0, +\infty[)\ :\ \log_a'(x) = \frac{1}{x\ln(a)}$$

$0 < a < 1$

x	0	$+\infty$
$\log_a'$	||	$-$
$\log_a$	||	$+\infty \searrow -\infty$

$a > 1$

x	0	$+\infty$
$\log_a'$	||	$+$
$\log_a$	||	$-\infty \nearrow +\infty$