# NOTIONS DE LOGIQUE 1 BAC

JAOUAD filali

## I.LA PROPOSION OU ASSERTION

*Exemples :*

1) $\sqrt{5} < \sqrt{2} + \sqrt{3}$
2) *pour tout entier naturel* $n$ *on a* $n^2 \geq n$
3) *si l'entier* $n$ *est impair alors* $n^2 + 5$ *est pair*
4) *il existe un nombre réel tel que* $x^2 + 1 < 2x$

Définition : *une proposition ( ou une assertion) est un énoncé mathématique qui affirme une propriété . elle est soit vraie soit fausse ; non pas à la fois vraie et fausse .on la note (P) ou (Q) ou (R)…*

*si la proposition est vraie on lui attribue V ou 1 si non F ou 0 appelé de verité de la proposition*

Fonctions propositionnelles : *des énoncés mathématiques ont un sens qui dépend d'une variable* $x$ *appartenant à un ensemble E sont des fonctions propositionnelles .*

Exemple : $x - 2 > 0$ *;* $x \in \mathbb{R}$ *. on la note P(x)*

*on a* $P(3)$ *vraie et* $P(0)$ *est fausse*

## II. QUANTIFICATEURS

Définition :

$E$ *désigne un ensemble non vide et,* $P(x)$ *une fonctions propositionnelles de la variable* $x$ *de* $E$

*1) La proposition : Pour tout élément* $x$ *de* $E$ *, on a* $P(x)$

*S'écrit :* $(\forall x \in E): P(x)$

$\forall$ *: quantificateur universel*

*2) la proposition : il existe un élément* $x$ *de* $E$ *, tel que* $P(x)$

*S'écrit :* $(\exists x \in E); P(x)$

$\exists$ *: quantificateur existentiel*

Exemples :

1) *($P_1$) :* $(\forall x \in \mathbb{R}): x \leq x^2$

*($P_1$) est une proposition fausse .( il suffit de donner un contre exemple)*

2) *($P_2$) :* $(\exists n \in \mathbb{N}); n^2 + 1 \in 2\mathbb{N}$

*($P_2$) est une proposition vraie*

Remarque : *si une proposition contient des quantificateurs de natures différents ; Sa valeur logique dépend de l'ordre de ces quantificateurs.*

Exemple : $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}); x + y < 3$ vraie

$(\exists y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}); x + y < 3$ fausse

NB. « l'emploi de quantificateurs en guise d'abréviations est exclu »

## III. OPÉRATIONS SUR LES PROPOSITIONS

### 1. la négation

*Nier une proposition* $(P)$ *c'est donner son contraire noté* $non(P), (\overline{P})$ *ou* $(\neg P)$ *qui est vraie si* $(P)$ *est fausse et inversement*

exemples :

| $(P)$ | $(\overline{P})$ |
|---|---|
| $\sqrt{5} < \sqrt{2} + \sqrt{3}$ | $\sqrt{5} \geq \sqrt{2} + \sqrt{3}$ |
| $(\exists n \in \mathbb{N}) \quad ; \frac{n^2+n}{2} \notin \mathbb{N}$ | $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad : n^2+n$ *est pair* |
| *pour tout* $x$ *de* $\mathbb{R}$ *: si* $x^2 > 9$ *alors* $x > 3$ | *il existe* $x \in \mathbb{R}$ *tel que* $x^2 > 9$ *et* $x \leq 3$ |

### 2. la conjonction et la disjonction de deux propositions

- *la proposition* $(P \text{ et } Q)$ *est la conjonction de la proposition* $(P)$ *et la proposition* $(Q)$. *On la note aussi*

  $(P \text{ et } Q)$ *est vraie si et seulement si les deux propositions* $(P)$ et $(Q)$ *sont vraies.*
- *la proposition* $(P \text{ ou } Q)$ *est la disjonction de la proposition* $(P)$ *et la proposition* $(Q)$. *On la note aussi*

  $(P \text{ ou } Q)$ *est vraie si l' une au moins des assertions* $(P)$ *ou* $(Q)$ *est vraie.*

Remarques :

1) *on peut construire un tableau de vérité de ces propositions*

| $(P)$ | $(Q)$ | $(P ou Q)$ | $(P \text{ et } Q)$ | $(\overline{P})$ |
|---|---|---|---|---|
| V | V | V | V | F |
| V | F | V | F | |
| F | V | V | F | V |
| F | F | F | F | |

2) *La négation de* $(P \text{ ou } Q)$ *est* $(\overline{P} \text{ et } \overline{Q})$

*La négation de* $(P \text{ et } Q)$ *est* $(\overline{P} \text{ ou } \overline{Q})$

Exemple : $(A)$: $(\forall x \in \mathbb{R}): \sqrt{x^2} = x$ ou $\sqrt{x^2} = -x$

$(\overline{A})$: $(\exists x \in \mathbb{R}): \sqrt{x^2} \neq x$ et $\sqrt{x^2} \neq -x$

### 3. Implication

*les expressions composées :*

1) $\sqrt{3} < 2$ *implique* $\left|\sqrt{3} - 2\right| = 2 - \sqrt{3}$

2) *le triangle* $ABC$ *est rectangle en* $A$ *donc* $B = C$

3) *si* $n \in \mathbb{P} \setminus \{2\}$ *alors* $n^2 + 5 \in 2\mathbb{N}$ *(avec* $\mathbb{P}$ ensemble des nombres premiers ) .

*Et en général* $(si\ P\ alors\ Q)$ *Sont dites des implications .on écrit* $(P \Rightarrow Q)$ .

Remarques :

1) $(P \Rightarrow Q)$ *est la proposition* $(\overline{P} \text{ ou } Q)$ *; d'où :*

*la proposition* $(P \text{ implique } Q)$ *est fausse si* $(P)$ *vraie et* $(Q)$ *fausse*

*et elle vraie dans les trois autres cas.*

2) *soit deux propositions* $(P)$ *et* $(Q)$.

* $(Q \Rightarrow P)$ *s'appelle l'implication réciproque de* $(P \Rightarrow Q)$
* $(\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$ *s'appelle l'implication contraposée de* $(P \Rightarrow Q)$
* $\overline{(Q \Rightarrow P)}$ *est la proposition* $(P \text{ et } \overline{Q})$

## 4. propositions équivalentes

Définition : *soit deux propositions* $(P)$ *et* $(Q)$.

*si* $(P \Rightarrow Q \quad et \quad Q \Rightarrow P)$ on dit que $P$ *équivalent à* $Q$

*et on écrit :* $(P \Leftrightarrow Q)$

Exemples :

* soit $x \in \mathbb{R}.(x^2 - x \leq 0 \Leftrightarrow x \in [0,1])$
* soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2.(|x| < |y|) \Leftrightarrow (x^2 < y^2)$

1) Si $(P \Leftrightarrow Q)$ *on dit aussi que* $(P \text{ si et seulement si } Q)$ *ou* $(P \text{ signifie } Q)$

2) $(P \Leftrightarrow Q)$ *est vraie lorsque* $(P)$ *et* $(Q)$ *ont les mêmes valeurs de vérité simultanément*

3) *l'équivalence est transitive : si* $(P \Leftrightarrow R)$ et $(R \Leftrightarrow Q)$ alors $(P \Leftrightarrow Q)$

## 5.théorème

*Soient E un ensemble non vide ,* $P(x)$ *et* $Q(x)$ *deux fonctions propositionnelles de la variable* $x$ *de E.*

1) $\lfloor (\forall x \in E): P(x) \text{ et } Q(x) \rfloor \Leftrightarrow \lfloor (\forall x \in E): P(x) \text{ et } (\forall x \in E): Q(x) \rfloor$

2) $\lfloor (\exists x \in E): P(x) \text{ ou } Q(x) \rfloor \Leftrightarrow \lfloor (\exists x \in E): P(x) \text{ ou } (\exists x \in E): Q(x) \rfloor$

3) $\lfloor (\forall x \in E): P(x) \text{ ou } (\forall x \in E): Q(x) \rfloor \Rightarrow \lfloor (\forall x \in E): P(x) \text{ ou } Q(x) \rfloor$

4) $\lfloor (\exists x \in E): P(x) \text{ et } Q(x) \rfloor \Rightarrow \lfloor (\exists x \in E): P(x) \text{ et } (\exists x \in E): Q(x) \rfloor$

# VI. LOIS LOGIQUES ET RAISONNEMENT

1.Définition : un énoncé composée de plusieurs propositions et de connecteurs (ou, et , $\Leftrightarrow, \Rightarrow, \neg$) est dit loi s'il est vrai quelque soit les valeurs logiques des Propositions.

2. Exemples : soit des propositions : $P, Q$ et R

1) $(P \text{ et } Q) \Rightarrow P$

2) $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P \text{ ou } Q)$

3) $[(P \text{ ou } Q) \text{ et } (R)] \Leftrightarrow [(P \text{ et } R) \text{ ou } (Q \text{ et } R)]$

4) $(R \text{ ou } (P \text{ et } Q)) \Leftrightarrow [(R \text{ ou } P) \text{ et } (R \text{ ou } Q)]$

5) lois de MORGAN $\neg(P \text{ et } Q) \Leftrightarrow (\neg P \text{ ou } \neg Q)$, $\quad \neg(P \text{ ou } Q) \Leftrightarrow (\neg P \text{ et } Q)$

## 3. loi de la contraposée

**Théorème :** *soit* $(P)$ *et* $(Q)$ *deux propositions.*

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$$

*Pour montrer que* $(P)$ *implique* $(Q)$ *on peut penser à montrer que* $(\neg Q)$ *implique* $(\neg P)$

**exemple :** *montrons que (P) :* $(\forall n \in \mathbb{N}): n^2 \in 2\mathbb{N} \Rightarrow n \in 2\mathbb{N}$

*soit* $n \in \mathbb{N}$. *Supposons* $n = 2p+1;\quad p \in \mathbb{N}$

*alors* $n^2 = (2p+1)^2 = 4p^2 + 4p + 1 = 2k+1;\ k \in \mathbb{N}$

*donc* $n^2$ *est impair. Et par la contraposée on a démontré que (P) est vraie.*

## 4. loi de l'absurde

**Théorème :** *soit* $(P)$ *et* $(Q)$ *deux propositions.*

$$(\neg P \Rightarrow Q) \text{ et } (\neg P \Rightarrow \neg Q) \Rightarrow (P)$$

**Preuve :**

$$\begin{aligned}(\neg P \Rightarrow Q) \text{ et } (\neg P \Rightarrow \neg Q) &\Leftrightarrow (P \text{ ou } Q) \text{ et } (P \text{ ou } \neg Q)\\ &\Leftrightarrow (P) \text{ ou } (Q \text{ et } \neg Q)\\ &\Rightarrow (P)\end{aligned}$$

**Exemple :** *soit* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *tel que pour tout* $\varepsilon > 0$ : $|a-b| < \varepsilon$

*démontrons par l'absurde que* $a = b$ .

*on suppose que* $a \neq b$ . *donc* $|a-b| > 0$

*on prend* $\varepsilon = \dfrac{|a-b|}{2}$ *donc* $|a-b| < \dfrac{|a-b|}{2}$

* *pour démontrer qu'une proposition* $(P)$ *est vraie ; on suppose que* $(\overline{P})$ *est vraie et on montre que* $(\neg P \Rightarrow Q)$ *avec* $(Q)$ *fausse*

## 5. Disjonction des cas

**Théorème :** *soit* $(P)$ , $(Q)$ *et* $(R)$ *des propositions.*

$$\lfloor (P \Rightarrow R) \text{ et } (Q \Rightarrow R) \rfloor \Rightarrow \lfloor (P \text{ ou } Q) \Rightarrow R \rfloor$$

* *pour prouver l'implication* $(P \text{ ou } Q) \Rightarrow R$ *; on montre que* $(P \Rightarrow R)$ *et* $(Q \Rightarrow R)$ *sont vraies.*

* *Pour démontrer qu'une proposition* $(Q)$ *est vraie, souvent on utilise la loi* $\lfloor (P \Rightarrow Q) \text{ et } (\overline{P} \Rightarrow Q) \rfloor \Rightarrow Q$

## 5. Raisonnement par récurrence

**Propriété :** *soit* $n_0$ *un entier naturel et P(n) une propriété définie sur* $\mathbb{N}$.

*si :*

i. $P(n_0)$ *est vraie*

ii. $(\forall n \geq n_0): P(n) \Rightarrow P(n+1)$

*alors* $(\forall n \geq n_0): P(n)$ *est une proposition vraie*

**Exemples :**

*En utilisant le raisonnement par récurrence, montrer que :*

1) *pour tout* $n$ *de* $\mathbb{N}$ *on a :* $3^{2n} - 5^n$ *est un multiple de* $4$

2) $\forall n \in \mathbb{N}^* : \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

3) $\forall n \in \mathbb{N}^* : \displaystyle\sum^{n} (2k+1) = (n+1)^2$